Actuariat – Finance – Informatique – Formation

Module 1 - Exercices

Mathématiques des Assurances de personnes

Mortalité et engagements en cas de Vie et Décès

Publication: décembre 2017

Alain Moeglin, actuaire, membre certifié de l'Institut des Actuaires IA

Synthèse

Une introduction rappelle le contexte et quelques définitions des assurances de personnes.
La mortalité, les tables de mortalités, le calcul de probabilités sont ensuite présentés.
Les formules actuarielles utilisées pour calculer les engagements de l'assureur en cas de vie de ou décès de l'assuré, sont expliquées, comme par exemple pour le capital différé, les rentes, les temporaires décès … les assurances mixtes.

MOEGLIN INSTITUTE 34 Boulevard du Midi 06150 CANNES LA BOCCA
tél + 33 4 93 90 54 15 fax + 33 4 93 49 91 18
Siret 534 918 073 00030 site www.moeglin.com mail support@moeglin.com

Sommaire

I EXERCICES PROPOSES

1 Mortalité et Assurance Décès

Exercice 01-01 Calcul de probabilité

A partir de la fonction de répartition de la variable aléatoire : durée de vie d'un individu, vous calculez différentes probabilités.

Exercice 01-02 Table de mortalité

Vous disposez d'une table de mortalité ajustée par la loi de Makeham. A partir de cette table vous déterminez les paramètres de l'ajustement.

2 Rentes

Exercice 02-01 Calcul de rentes

Vous calculez les primes et provisions :
- pour une rente viagère immédiate trimestrielle payable à terme échu,
- pour une rente certaine trimestrielle payable à terme échu.

Exercice 02-02 Calcul de rentes

Exercices sur les rentes.

Exercice 02-03 Rentes indexées

On considère deux rentes viagères immédiates trimestrielles, payable à terme échu de capital constitutif de 1€.
Vous calculez la durée k qui permet d'égaliser les montants annuels de la première rente indexée à un taux annuel r et la deuxième rente indexée à un taux annuel s.

Exercice 02-04 Calcul de l'erreur de l'approximation des rentes fractionnées

Vous calculez les valeurs actuelles probables des rentes fractionnées viagères mensuelles :
- avec une interpolation des lx
- avec la bibliothèque de fonctions actuarielles

vous comparez ensuite les deux résultats.

3 Epargne

Exercice 03-01 Produit d'épargne

Une compagnie d'assurances sur la vie souhaite étudier un produit d'épargne de la concurrence : un compte à versements libres.

Vous devez retrouver certains paramètres de ce produit à partir des informations présentes dans une situation de compte qui vous est remise.

Exercice 03-02 Produit d'épargne

Vous disposez des documents « demande de souscription » de 3 produits d'épargne. Vous calculez pour chaque contrat, à la fin de chaque année d'adhésion :

- la valeur de rachat minimale pour un 1€ de cotisation brute,
- le montant de l'épargne acquise.

Au terme du contrat de deux de ces produits, l'assuré a la possibilité de transformer son épargne acquise en rente. Vous calculez les primes et provisions relatives au contrat de rente.

II Mortalité et Assurance Décès

1 Exercice 01-01 Calcul de probabilité

a Enoncé

Soit T_0 la variable aléatoire qui représente la durée de vie d'un individu entre sa naissance et son décès.

Soit la fonction de répartition $F_0(t) = \text{probabilité}\left[T_0 \le t\right]$
Elle représente la probabilité pour une personne d'âge 0 de décéder avant la date t.

Soit $S_0(t) = 1 - F_0(t) = \text{probabilité}\left[T_0 > t\right]$
Elle représente la probabilité pour que l'individu d'âge 0 décède après la date t.

Soit la valeur $F_0(t) = 1 - e^{-0.01 \times t}$

Calculer les probabilités suivantes

1) un individu d'âge 0 décède avant 45 ans.

2) un individu d'âge 0 décède après 80 ans.

3) un individu d'âge 0 décède après 45 ans et avant 80 ans.

4) un individu d'âge 20 décède après 40 ans.

5) un individu d'âge 30 décède avant 80 ans.

b Correction

Question 1

$$F_0(45) = 1 - e^{-0.01\times45} = 0.362372$$

Question 2

$$S_0(80) = e^{-0.01\times80} = 0.449329$$

Question 3

$$P[45 < T_0 \le 80] = F_0(80) - F_0(45) = (1 - e^{-0.01\times80}) - (1 - e^{-0.01\times45}) = 0.188299$$

Question 4

$$S_x(t) = P[T_0 > x + t / T_0 > x] = \frac{P[T_0 > x + t]}{P[T_0 > x]} = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

$$S_{20}(20) = P[T_0 > 40 / T_0 > 20] = \frac{P[T_0 > 40]}{P[T_0 > 20]} = \frac{S_0(40)}{S_0(20)} = \frac{e^{-0.01\times40}}{e^{-0.01\times20}} = 0.818731$$

Question 5

$$F_x(t) = P[T_0 \le x + t / T_0 > x] = \frac{P[T_0 \le x + t]}{P[T_0 > x]} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

$$F_{30}(50) = P[30 < T_0 \le 80 / T_0 > 30] = \frac{P[30 < T_0 \le 80]}{P[T_0 > 30]} = \frac{F_0(80) - F_0(30)}{1 - F_0(30)}$$

$$F_{30}(50) = \frac{e^{-0.01\times30} - e^{-0.01\times80}}{e^{-0.01\times30}} = 0.393469$$

2 Exercice 01-02 Table de mortalité

a Enoncé

Vous disposer de la table de mortalité suivante qui a été ajustée par la loi de Makeham. (Voir page suivante)

Le taux instantané de mortalité s'exprime $\mu_x = a + bc^x$

La loi de survie de Makeham est notée $l_x = k \times s^x \times g^{c^x}$

Les constantes **c, g, k, s** peuvent être déterminées avec la méthode de **KING-HARDY**

Question 1

Démontrer que $\dfrac{A_{x+n} - A_{x+2n}}{A_x - A_{x+n}} = c^n$ avec $A_x = \sum_{k=x}^{x+n-1} \log(p_x)$

Question 2

En fixant une valeur x=20 et n=20, et à partir de la table fournie en annexe, déterminer les valeurs :

- des constantes C, g, k, s,
- des la constantes a et b.

Question 3

Tracer le graphe de l'équation $\ln\left(\left|q_{x+1} - q_x\right|\right)$

Question 4

Que constatez-vous ?
Quel est le type de courbe ? (droite, parabole ….)
Donner la valeur de l'ordonnée à l'origine pour x=0
Donner la valeur de la dérivé pour un point x <>0

Question 5

Déterminer l'équation de la fonction $\ln\left(\left|q_{x+1} - q_x\right|\right)$

Table de mortalité ajustée par une loi de Makeham

Age	Lx	Age	Lx	Age	Lx	Age	Lx
0	100 000,00	**25**	98 927,41	**50**	96 499,00	**75**	79 787,57
1	99 960,85	**26**	98 875,27	**51**	96 294,65	**76**	78 142,44
2	99 921,58	**27**	98 821,64	**52**	96 073,40	**77**	76 369,26
3	99 882,18	**28**	98 766,37	**53**	95 833,58	**78**	74 462,03
4	99 842,64	**29**	98 709,28	**54**	95 573,38	**79**	72 415,33
5	99 802,94	**30**	98 650,20	**55**	95 290,78	**80**	70 224,65
6	99 763,06	**31**	98 588,90	**56**	94 983,61	**81**	67 886,58
7	99 722,99	**32**	98 525,17	**57**	94 649,50	**82**	65 399,18
8	99 682,69	**33**	98 458,75	**58**	94 285,84	**83**	62 762,26
9	99 642,16	**34**	98 389,36	**59**	93 889,83	**84**	59 977,82
10	99 601,35	**35**	98 316,70	**60**	93 458,40	**85**	57 050,40
11	99 560,24	**36**	98 240,44	**61**	92 988,24	**86**	53 987,46
12	99 518,81	**37**	98 160,20	**62**	92 475,75		
13	99 477,00	**38**	98 075,58	**63**	91 917,07		
14	99 434,79	**39**	97 986,12	**64**	91 308,03		
15	99 392,13	**40**	97 891,33	**65**	90 644,16		
16	99 348,98	**41**	97 790,67	**66**	89 920,65		
17	99 305,27	**42**	97 683,54	**67**	89 132,41		
18	99 260,95	**43**	97 569,28	**68**	88 274,01		
19	99 215,97	**44**	97 447,17	**69**	87 339,72		
20	99 170,23	**45**	97 316,40	**70**	86 323,54		
21	99 123,68	**46**	97 176,11	**71**	85 219,16		
22	99 076,22	**47**	97 025,34	**72**	84 020,10		
23	99 027,76	**48**	96 863,02	**73**	82 719,66		
24	98 978,19	**49**	96 688,00	**74**	81 311,08		

b Correction

Question 1

Montrer que $\dfrac{A_{x+n} - A_{x+2n}}{A_x - A_{x+n}} = c^n$ avec $A_x = \sum_{k=x}^{x+n-1} Ln(p_k)$.

On a la relation suivante :

$$l_x = k \,.\, s^x \,.\, g^{c^x}$$

D'où

$$A_x = \sum_{k=x}^{x+n-1} Ln(p_k) = \sum_{k=x}^{x+n-1} Ln\left(\frac{l_{k+1}}{l_k}\right) = \sum_{k=x}^{x+n-1} Ln\left(s \,.\, g^{c^k (c-1)}\right)$$

Soit

$$A_x = n \cdot Ln\,(s) + \sum_{k=x}^{x+n-1} \ln(e^{c^k \cdot (c-1) \cdot \ln g})$$

$$A_x = n \cdot Ln\,(s) + \ln(g) \cdot (c-1) \sum_{k=x}^{x+n-1} c^k$$

$$A_x = n \cdot Ln\,(s) + \ln(g) \cdot (c-1) \cdot c^x \sum_{j=0}^{n-1} c^j$$

$$\text{Et} \quad \sum_{j=0}^{n-1} c^j = \frac{1\text{-}c^n}{1\text{-}c}$$

D'où

$$A_x = n \cdot Ln\,(s) + \ln(g) \cdot (c-1) \cdot c^x \frac{1-c^n}{1-c} = n \cdot Ln\,(s) + \ln(g) \cdot c^x \cdot (c^n - 1)$$

On obtient alors,

$$A_x - A_{x+n} = \ln(g) \cdot \left(c^x - c^{x+n}\right) \cdot \left(c^n - 1\right)$$

D'où, $\dfrac{A_{x+n} - A_{x+2n}}{A_x - A_{x+n}} = \dfrac{\ln(g) \cdot \left(c^{x+n} - c^{x+2n}\right) \cdot \left(c^n - 1\right)}{\ln(g) \cdot \left(c^x - c^{x+n}\right) \cdot \left(c^n - 1\right)}$

Et $\boxed{\dfrac{A_{x+n} - A_{x+2n}}{A_x - A_{x+n}} = \dfrac{c^n \cdot \left(c^x - c^{x+n}\right)}{\left(c^x - c^{x+n}\right)} = c^n}$

Question 2

A partir de la relation précédente, on calcule la valeur de c.

Valeur de c = 1,103572

$$g = e^{\frac{A_x - A_{x+n}}{(c^x - c^{x+n}) \cdot (c^n - 1)}}$$

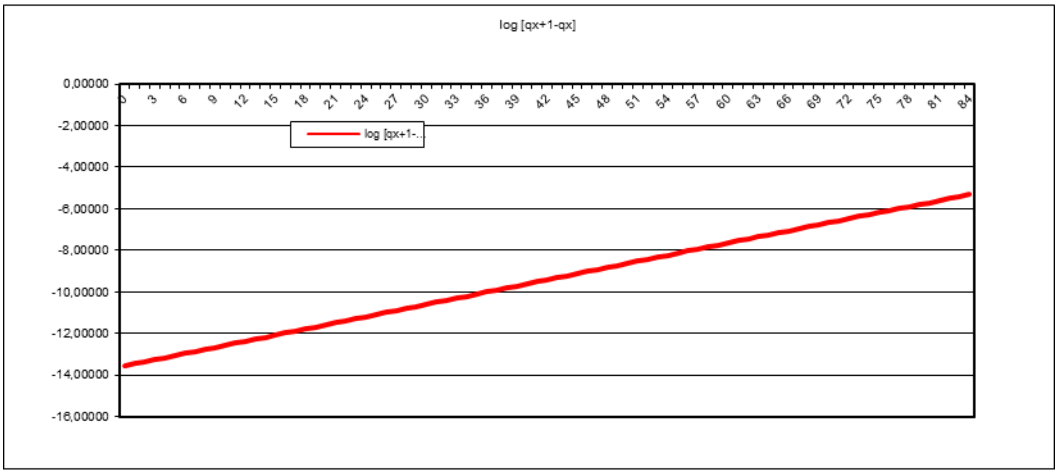
$$k = \frac{l_0}{g}$$

$$s = e^{\frac{A_x - (c-1) \cdot c^x \cdot Ln(g) \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}}{n}}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de s, g et k

s	g	k
0,999621072	0,999878245	100012,177

Question 3



Question 4 et 5

Il s'agit d'une droite. L'équation de la droite est :

$$Ln\left|q_{x+1} - q_x\right| = xLn(c) + Ln\left|(c-1)^2 Ln(g)\right|$$

III Rentes

1 Exercice 02-01 Calcul de rentes

a Enoncé

Question 1

Calculer, pour une rente viagère immédiate trimestrielle à terme échu :
- la prime unique d'inventaire
- le taux de rente
- la provision d'inventaire

avec x=65 ans, table TPRV1993, taux technique 4.50 %, chargement 3 %.
(Indiquer également les formules utilisées)

Question 2

Calculer les mêmes données avec les tables :
- TV 73/77
- TV 88/90

Question 3

Indiquer en %, les variations de la provision d'inventaire, pour passer de la :
- TV 73/77 à la TV 88/90
- TV 88/90 à la TPRV1993
- TV 73/77 à la TPRV1993

Question 4

Comment expliquer ces variations ?
Que prévoit la législation pour ces changements de tables (compléter vos explications avec un exemple) ?

Question 5

Rente certaine, trimestrielle à terme échu

a) Donner la définition d'une rente certaine
b) Calculer la prime unique pure (démontrer la formule)
c) application numérique : calculer :
   - la prime unique d'inventaire
   - le taux de rente
   - la provision d'inventaire

Avec : durée n=20 ans, taux technique annuel i = 4.50 %, chargement 3 %

b Correction

Question 1

- Prime unique pure $\boxed{PUP = a_x^{(4)} \approx a_x + \frac{4-1}{2\times 4} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{3}{8}}$
- Prime unique d'inventaire $\boxed{PUI = (1+\alpha)\times PUP}$ où α est le chargement.
- Taux de rente $\boxed{Tx = \frac{1}{PUI}}$
- Provision pure sans chargement $\boxed{V_{x+\frac{1}{2}} = \frac{a_x^{(4)} + a_{x+1}^{(4)}}{2}}$
- Provision pure avec chargement $\boxed{V'_{x+\frac{1}{2}} = (1+\alpha)\times V_{x+\frac{1}{2}}}$

Questions 1 / 2 / 3

Applications numériques

	TV 73/77	TV 88/90	TPRV 1993
PUI	11,6911	12,8159	14,5648 (sans correctif)
Taux de rente	0,0855	0,0780	0,0687
$V'_{x+\frac{1}{2}}$	11,5043	12,6359	14,4039

Variation TV 73/77 à TV 88/90 : + 9,84 %
Variation TV 88/90 à TPRV 1993 : + 13,99 %
Variation TV 73/77 à TPRV 1993 : + 25,20 %

Question 4

Ces variations sont dues aux différentes mortalités des tables : les personnes recevront des rentes de plus en plus longtemps, donc l'engagement de l'assureur est de plus en plus grand depuis la TV 73/77.

Question 5

Rente certaine, trimestrielle à terme échu

a) Une rente certaine est une rente où la probabilité $\frac{l_{x+k}}{l_x} = 1$.

b) $PUP = \sum_{k=1}^{n\times m} \frac{1}{m}\times v_m^k$ avec $v_m = \frac{1}{1+i_m}$ tel que $i_m = (1+i)^{1/m} - 1$

$$PUP = \frac{1}{m} \times v_m + \frac{1}{m} \times v_m^2 + \ldots + \frac{1}{m} \times v_m^{n \times m} = \frac{1}{m} \times v_m \times \frac{1 - v_m^{n \times m}}{1 - v_m}$$

$$\boxed{PUP = \frac{1}{m} \times \frac{1 - v_m^{n \times m}}{i_m}}$$

c) Applications numériques

Prime unique d'inventaire

$$PUI = (1 + \alpha) \times PUP$$
$$PUI = 13,6245$$

Taux de rente

$$\frac{1}{PUI} = 0.0734$$

Provision pure

$${}_kV_x = \sum_{j=1}^{m \times n - m \times k} \frac{1}{m} \times (1 + i_m)^{-j} = \sum_{j=1}^{m \times n - m \times k} \frac{1}{m} \times v_m^j = \frac{1}{m} \times \frac{1 - v_m^{m \times n - m \times k}}{i_m}$$

$$\boxed{{}_kV_x = \frac{1}{m} \times \frac{1 - v^{n-k}}{i_m}}$$

2 Exercice 02-02 Calcul de rentes

a Enoncé

Question A

Deux personnes âgées respectivement de 30 et 40 ans, décident de participer, à part égale, à une œuvre de charité.

La première souhaite verser chaque année, de l'âge de 30 ans à l'âge de 44 ans inclus, une somme de 1000 €.

La seconde souhaite verser une somme S à ses 45 ans, s'il est vivant à cet âge.

1- Déterminer la relation actuarielle pour calculer la somme S.

2- Calculer 2 valeurs de la somme S en utilisant : la table TV 73-77, taux 3.50%.

Question B

Une personne âgée de 30 ans décide de verser, de son vivant, une somme de 1000 €, en fin de chaque année et jusqu'à 60 ans inclus.

Les capitaux ainsi obtenus sont utilisées pour lui servir une rente viagère à termes échus trimestriels, jusqu'à son décès.

1- Déterminer la relation actuarielle pour calculer la rente trimestrielle.

2- Calculer le montant de la rente trimestrielle en utilisant :
- la table TV 73-77, taux 3.50%, pour les capitaux versés par l'assuré jusqu'à 60 ans.
- la table TV 73-77, taux 4.50%, pour le service de la rente trimestrielle.

b Correction

Question A

1- Relation actuarielle pour déterminer S

$$\boxed{1000 \times \ddot{a}_{30:\overline{15|}} = S \times {}_5E_{40}}$$

2- Calculer la valeur de la somme S

table TV 73-77, taux 3.50%

$$\left.\begin{array}{lcl} \ddot{a}_{30:\overline{15|}} & = & 11{,}8421578 \\ {}_5E_{40} & = & 0{,}83381707 \end{array}\right\} \Rightarrow S = 14\ 202\ €$$

Question B

1- Relation actuarielle pour calculer la rente trimestrielle : r_{trim}

$$\boxed{1000 \times a_{30:\overline{30|}} = r \times {}_{30}a_{30}^{(4)}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{r = \frac{1000 \times a_{30:\overline{30|}}}{{}_{30}a_{30}^{(4)}}}$$

avec r la rente annuelle fractionnée en 4 versements trimestriels

Donc $\boxed{r_{trim} = \frac{r}{4}}$

2- Calcul du montant de la rente trimestrielle

- table TV 73-77, taux 3.50%, pour les capitaux versés par l'assuré jusqu'à 60 ans.
- table TV 73-77, taux 4.50%, pour le service de la rente trimestrielle.

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{30:\overline{30|}} & = & 17.9816 \\ {}_{30}a_{30}^{(4)} & = & 3.1882 \end{array}\right\} \Rightarrow r_{trim} = 1410.01\ €$$

3 Exercice 02-03 Rentes indexées

a Enoncé

On considère deux rentes viagères immédiates trimestrielles, payable à terme échu.

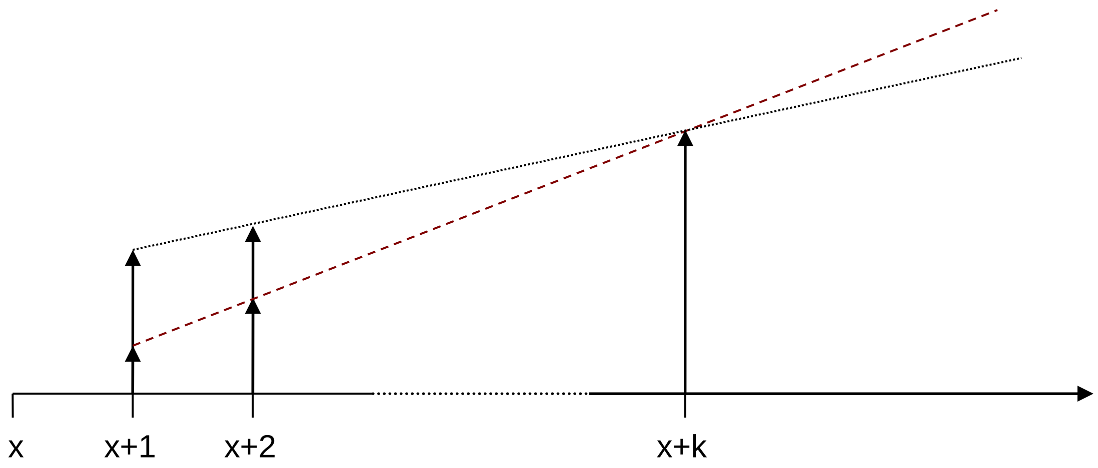
Le capital constitutif de ces deux rentes est de 1€.

La première est calculée sur la base d'un taux technique de 4.50% et de la table TV 73/77.

La deuxième est calculée sur la base d'un taux technique de 0.00% et de la table TV 73/77.

Question A

Calculer la durée k qui permet d'égaliser les montants annuels de la première rente indexée à un taux annuel r et la deuxième rente indexée à un taux annuel s.



Question B

Applications numériques

- x = 60 ans ; r = 0.00% ; s = 4.50%
- x = 60 ans ; r = 2.50% ; s = 7.00%

b Correction

Question A

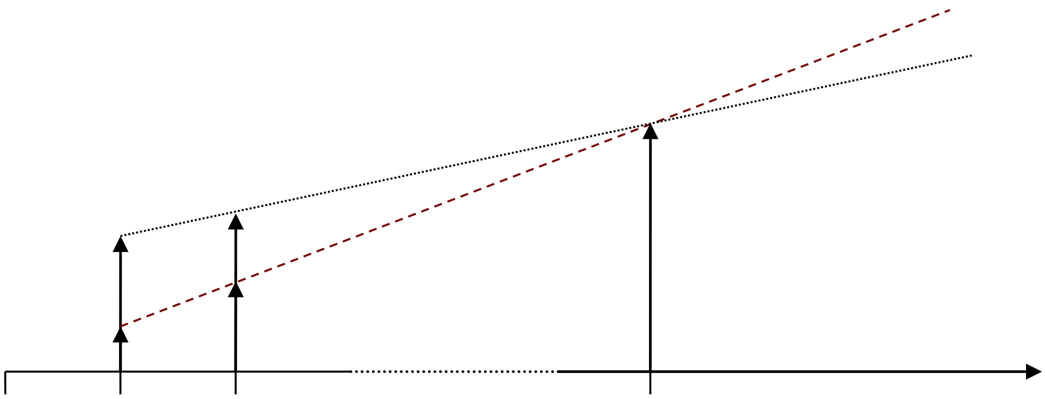
Calculer la durée k qui permet d'égaliser les montants annuels de la première rente indexée à un taux annuel r et la deuxième rente indexée à un taux annuel s.

Calcul du montant des rentes viagères

Le montant r_1 de la première rente est déterminé par l'équation : $1 = r_1 \times PUI_{1,x}$

Le montant r_2 de la première rente est déterminé par l'équation : $1 = r_2 \times PUI_{2,x}$

Egalisation des montants annuels des rentes indexées



$$(1+r)^k \times r_1 = (1+s)^k \times r_2 \quad \Leftrightarrow (1+r)^k \times \frac{1}{PUI_{1,x}} = (1+s)^k \times \frac{1}{PUI_{2,x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+r}{1+s}\right)^k = \frac{PUI_{1,x}}{PUI_{2,x}}$$

Donc
$$\boxed{k = \frac{\ln\left(\frac{PUI_{1,x}}{PUI_{2,x}}\right)}{\ln\left(\frac{1+r}{1+s}\right)}}$$

Question B

Applications numériques

On prend $\alpha = 3\%$

- x = 60 ans ; r = 0.00% ; s = 4.50%

$$\left.\begin{array}{l} PUI_{1,60} = (1+\alpha)\times a_{60}^{(4)}(4.50\%) = 13.4493 \\ PUI_{2,60} = (1+\alpha)\times a_{60}^{(4)}(0.00\%) = 21.9574 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 11.136$$

- x = 60 ans ; r = 2.50% ; s = 7.00%

$$\left.\begin{array}{l} PUI_{1,60} = (1+\alpha)\times a_{60}^{(4)}(4.50\%) = 13.4493 \\ PUI_{2,60} = (1+\alpha)\times a_{60}^{(4)}(0.00\%) = 21.9574 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 11.408$$

4 Exercice 02-04 Calcul de l'erreur de l'approximation du au fractionnement

a Enoncé

Exercice sur la mise en évidence de l'erreur de l'approximation pour les annuités viagères à termes fractionnées anticipées immédiates et illimitées.

Rappelons l'approximation : $\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m}$

Notons que les fonctions de la bibliothèque donnent les valeurs approchées.

Données :
Table TH0002
Taux technique i = 3%
Age 35 ans
Capital 1000 € de rentes annuelles
Fractionnement m = 12

BUT : Déterminer la valeur exacte de cette rente et calculer l'erreur relative et absolue entre cette valeur et la valeur approchée de la bibliothèque.

Questions :

1) calculer les lx pour ce fractionnement en utilisant une interpolation linéaire (au mois)
2) calculer les probabilités associées à ces lx fractionnés (donc sans utiliser la fonction de la bibliothèque).
3) calculer les coefficients d'actualisation en utilisant les taux actuariels.

   Rappel des taux équivalents : $t = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1$

4) en déduire les valeurs actuelles probables de la rente viagère à terme d'avance fractionnée.
5) Utiliser la fonction de la bibliothèque le « adotm_x ».
6) Calculer les erreurs absolue et relative entre ces 2 valeurs.

Questions complémentaires :

7) Faire dans Excel, une macro VBA qui permet de déterminer les erreurs relatives pour les différents âges (de 0 à l'âge limite de la table).
8) Utiliser ensuite cette macro mais cette fois avec un taux technique de 0%, de 3% et de 5%.
9) Tracer ce graphique avec les courbes issues des différents taux technique avec en ordonnée l'erreur relative et en abscisse les âges. Interpréter.

N-B : Pour l'interprétation, vous pourrez regarder le dernier terme de la formule de Woolhouse.

Rappelons la formule de Woolhouse : $\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \dfrac{m-1}{2m} - \dfrac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$ avec $\delta = -\ln(1+i)$

b Correction

Questions 1

Feuille : lx

	A	B
1	table	TH0002
2	Taux i	3%

Ce tableau partiel indique comment calculer les lx :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	=l_x($B$1;A6)	=$B6+(C$5/12)*($B7-$B6)	=$B6+(D$5/12)*($B7-$B6)	…
7	36	=l_x($B$1;A7)	=$B7+(C$5/12)*($B8-$B7)	=$B7+(D$5/12)*($B8-$B7)	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

Les résultats obtenus sont :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	97249	97 237	97 224	…
7	36	97100	97 087	97 073	…
⋮	⋮	⋮	⋮		…

Questions 2

Feuille : proba

Ce tableau partiel indique comment calculer les px :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	=lx!B6/lx!$B$6)	=lx!C6/lx!$B$6	=lx!D6/lx!$B$6	…
7	36	=lx!B7/lx!$B$6	=lx!C7/lx!$B$6	=lx!D7/lx!$B$6	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

Les résultats obtenus sont :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	1.00000	0.99987	0.99974	…
7	36	0.99847	0.99833	0.99819	…
⋮	⋮	⋮	⋮		…

Questions 3

Feuille : actualisation

	A	B
2	Taux t	=(1+Ix!B2)^(1/12)-1

Ce tableau partiel indique comment calculer les coefficients d'actualisation :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	=(1+$B$2)^(-B$5-($A6-$A$6)*12)	=(1+$B$2)^(-C$5-($A6-$A$6)*12)	=(1+$B$2)^(-D$5-($A6-$A$6)*12)	…
7	36	=(1+$B$2)^(-B$5-($A7-$A$6)*12)	=(1+$B$2)^(-C$5-($A7-$A$6)*12)	=(1+$B$2)^(-D$5-($A7-$A$6)*12)	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

Les résultats obtenus sont :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	1.00000	0.99754	0.99509	…
7	36	0.97087	0.96849	0.96610	…
⋮	⋮	⋮	⋮		…

Questions 4

Feuille : coeff

	C	D
2	Capital C	1000

Ce tableau partiel indique comment calculer ces valeurs actuelles :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	=proba!B6*actualisation!B6*$D$1/12	=proba!C6*actualisation!C6*$D$1/12	=proba!D6*actualisation!D6*$D$1/12	…
7	36	=proba!B6*actualisation!B6*$D$1/12	=proba!C7*actualisation!C7*$D$1/12	=proba!D7*actualisation!D7*$D$1/12	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

Les résultats obtenus sont :

	A	B	C	D	…
5	Age	0	1	2	…
6	35	83.33	83.12	82.90	…
7	36	80.78	80.57	80.36	…
⋮	⋮	⋮	⋮		…

La VAP exacte de cette rente est : 23 262.69
Elle est obtenue par la somme de toutes les valeurs actuelles du tableau précédent.

Questions 5

adotm_x(TH0002 ;12 ;35 ;3%)*1000 = 23265.91
On peut vérifier que adot_x(TH0002 ;35 ;3%)*1000 – (12-1)/(2*12)*1000 = 23265.91

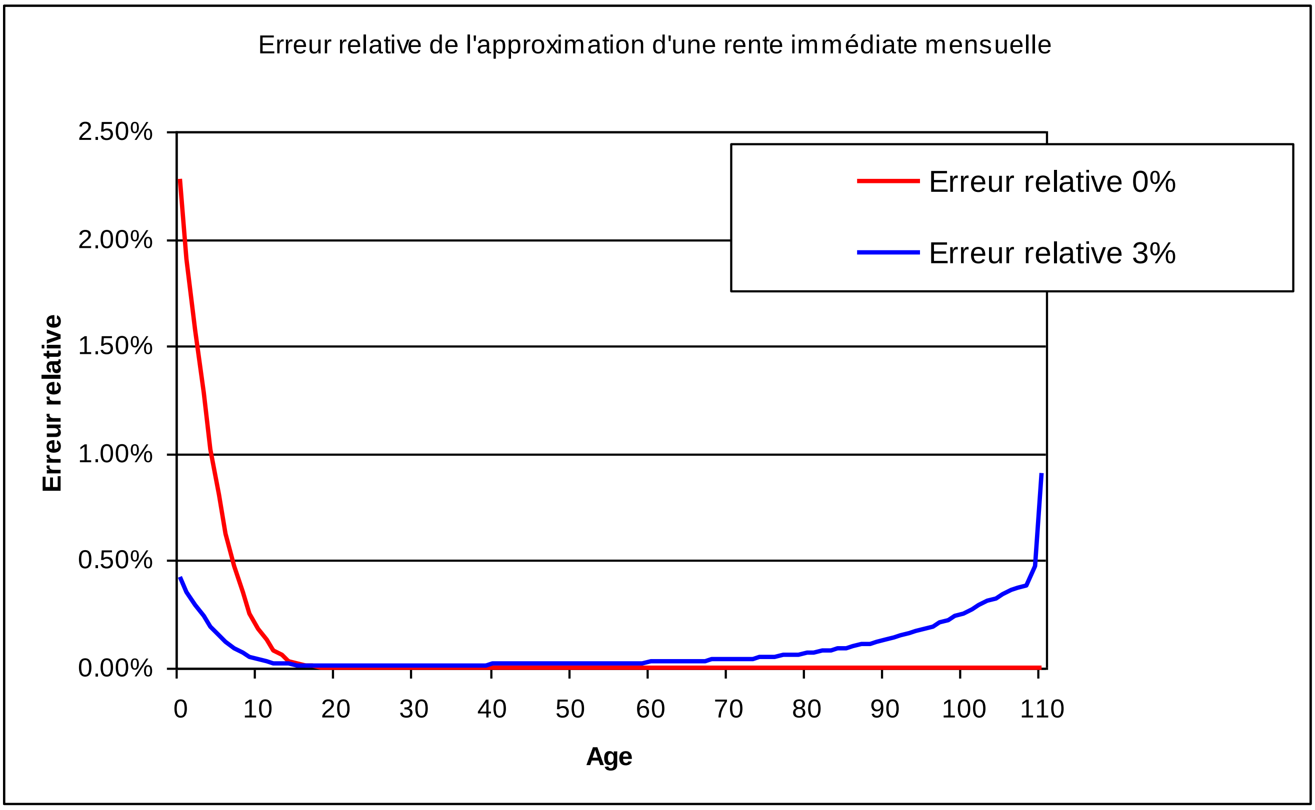
Questions 6

L'erreur absolue est : 23265.91-23 262.69 = 3.22
L'erreur relative est : (23265.91-23 262.69)/ 23 262.69 = 0.01%

Questions 7/8

Il y a plusieurs façons de faire, nous en présentons une ci-après :
L'idée est de faire 2 boucles.
Au préalable, mettre les différents taux technique sur la même ligne par exemple, dans une nouvelle feuille « erreur ». On trouvera dans cette feuille les erreurs relatives pour tous les âges.
Connecter les différentes feuilles entre elles pour le taux technique, la table, l'âge pour que lorsqu'on modifie par exemple l'âge, tous les calculs des feuilles prennent en compte cette nouvelle donnée.
La première boucle inclura la deuxième, et parcourra les différents taux techniques.
La deuxième boucle va modifier l'âge de 0 à l'âge limite de la table et affichera à chaque incrémentation l'erreur relative dans la feuille erreur.

Questions 9



Vers des âges élevés, les provisions ou les primes sont faibles mais le correctif lui $\frac{m-1}{2m}$, reste toujours constant et donc aussi grand quelque soit l'âge, donc il prend de plus en plus d'importance vis-à-vis des provisions (car les provisions diminuent au fil du temps) et donc il influe de plus en plus sur l'erreur relative. Ceci est corrigé par le dernier terme de la formule de Woolhouse.

IV Epargne

1 Exercice 03-01 Produit d'épargne

a Enoncé

Une compagnie d'assurances sur la vie souhaite étudier un produit d'épargne de la concurrence.

Il s'agit de retrouver certains paramètres à partir des informations qui vous sont fournies.

Une situation de compte d'un contrat vous a été remise (voir annexe).
Il s'agit d'un compte à versements libres avec une fiscalité PEP.

Question A

Déterminer le taux des frais prélevés sur les versements bruts.

Question B

Déterminer le montant des frais prélevés sur l'épargne acquise au 01/01/1990, sachant que ces frais représentent 0.40% de cette base.

Question C

Reconstituer le calcul qui permet d'obtenir le montant des revalorisations, soit 834.93 €.

SITUATION DE COMPTE

Contrat: Compte épargne à versement libre
Souscrit le: 1er janvier 1990
Option fiscale: PLAN D'EPARGNE POPULAIRE - ASSURANCE VIE

Information annuelle sur les versements et les retraits de l'exercice 1990

Date de valeur	Libellé des opérations	Débit	Crédit
	Epargne acquise au 01/01/1990		8 345,41 €
07/02/1990	Votre versement de 1 100 € soit net à votre compte		1 047,75 €
01/01/1991	Revalorisations au taux de 9.02% **		834,93 €
	Totaux annuels		10 228,09 €
	A votre compte au 01/01/1991		10 228,09 €

- En 1990, votre épargne a été revalorisée au taux de 9,02%.
- Epargne acquise au 01/01/1991: 10 228.09 euros.
- Le montant indiqué ci-dessus est garanti en cas de décès, rachat.

** REVALORISATIONS: elles sont calculées au prorata temporis des dates de valeur de vos versements.
(Le minimum légal était de 4.50%)

b Correction

Question A

Frais sur versement = $\frac{1100-1047.75}{1100}=0.0475$ soit 4.75% du brut.

Question B

Le montant des frais prélevés sur l'épargne acquise au 01/01/1990, sachant que ces frais représentent 0.40% de cette base est $8345.41\times 0.004=33.38€$.

Question C

Le calcul qui permet d'obtenir le montant des revalorisations est :

$$\left(8345.41\times(1-0.4\%)+1047.75\times\frac{365-36}{365}\right)\times 9.02\%=834.93€$$

2 Exercice 03-02 Produit d'épargne

a Enoncé

La FRANCE MUTUALISTE diffuse plusieurs produits de retraite et d'épargne, par l'intermédiaire de Mutuelles, réparties sur l'ensemble du territoire et dont la RETRAITE MUTUALISTE est la plus importante.

Vous disposez des documents « demande de souscription » de 3 produits d'épargne que nous allons étudier.

Question A

Calculer pour chaque contrat, la valeur de rachat minimale (arrondie à 4 décimales) pour 1€ de cotisation brute, à la fin de chaque année d'adhésion.

1) Donner la formule générale utilisée
2) Compléter le tableau suivant :

Date du rachat	RENTEPARGNE	BONEPARGNE	FUNEPARGNE
Fin de 1ère année			
Fin de 2ème année			
Fin de 3ème année			
Fin de 4ème année			
Fin de 5ème année			
Fin de 6ème année			
Fin de 7ème année			
Fin de 8ème année			
Fin de 9ème année			
Fin de 10ème année			

Question B

Calculer pour chaque contrat, le montant de l'épargne acquise (arrondie à 4 décimales), à la fin de chaque année d'adhésion :

- pour 1€ de cotisation brute unique
- pour 1€ de cotisation brute annuelle

1) Démontrer les formules utilisées
2) Compléter les tableaux suivants:

Epargne acquise garantie
à la fin de chaque année d'adhésion

Date du rachat	RENTEPARGNE		BONEPARGNE		FUNEPARGNE	
	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle
Fin de 1ère année						
Fin de 2ème année						
Fin de 3ème année						
Fin de 4ème année						
Fin de 5ème année						
Fin de 6ème année						
Fin de 7ème année						
Fin de 8ème année						
Fin de 9ème année						
Fin de 10ème année						

MOEGLIN INSTITUTE 34 Boulevard du Midi 06150 CANNES LA BOCCA
tél + 33 4 93 90 54 15 fax + 33 4 93 49 91 18 www.moeglin.com

Epargne acquise estimée
à la fin de chaque année d'adhésion

Taux estimés

RENTEPARGNE **7%**
FUNEPARGNE **7%**
BONEPARGNE **9%**

Date du rachat	RENTEPARGNE		BONEPARGNE		FUNEPARGNE	
	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle	Cotisation brute unique	Cotisation brute annuelle
Fin de 1ère année						
Fin de 2ème année						
Fin de 3ème année						
Fin de 4ème année						
Fin de 5ème année						
Fin de 6ème année						
Fin de 7ème année						
Fin de 8ème année						
Fin de 9ème année						
Fin de 10ème année						

Question C

Au terme du contrat RENTEPARGNE ou BONEPARGNE, l'assuré à la possibilité de transformer son épargne acquise en rente.

1) Démontrer les formules de calcul de la prime unique d'inventaire pour une rente immédiate, à termes échus, fractionnés par m$^{\text{ième}}$
    a) la rente est viagère sur une tête,
    b) la rente est certaine,
    c) la rente est réversible.

2) Donner les formules de calcul des provisions mathématiques d'inventaire pour 1€ de rente annuelle, dans les 3 cas précédents.

3) Démontrer les formules de calcul qui permettent de calculer la rente annuelle, pour 1€ d'épargne acquise (capital), dans les 3 cas précédents.

4) Compléter les 3 tableaux suivants :

Rente viagère immédiate trimestrielle à termes échus

Taux garanti	4,50%
Table de mortalité	TV 73/77

Age	Prime Unique d'Inventaire (PUI)	Provision d'Inventaire	Rente annuelle en % pour 1€ de capital
60			
61			
62			
63			
64			
65			
66			
67			
68			
69			
70			

Rente certaine trimestrielle à termes échus

Taux garanti 4,50%

Durée en années	Prime Unique d'Inventaire (PUI)	Provision d'Inventaire	Rente annuelle en % pour 1€ de capital
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Rente viagère immédiate trimestrielle à termes échus avec réversion à 60%

Taux garanti 4,50%
Table de mortalité TV 73/77
On suppose que x = y

Age	Prime Unique d'Inventaire (PUI)	Provision d'Inventaire	Rente annuelle en % pour 1€ de capital
60			
61			
62			
63			
64			
65			
66			
67			
68			
69			
70			

b Correction

Question A

1) Donner la formule générale utilisée

$$\text{Valeur Rachat Min}_k = \frac{1}{(1+g)} \times (1-\alpha_k) \times (1+i)^k$$

g = frais de gestion

i = taux garanti

$$\alpha_k \text{ (pénalité de rachat)} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 5\% & [0 \text{ et } 1 \text{ ans}] \\ \alpha_2 = 3\% & [1 \text{ et } 2 \text{ ans}] \\ \alpha_3 = 1\% & [2 \text{ et } 3 \text{ ans}] \\ \alpha_k = 0 & \text{au-delà} \end{cases}$$

2) Compléter le tableau

Valeur de Rachat minimale
à la fin de chaque année d'adhésion
et pour 1€ de cotisation brute versée à la souscription

Date du rachat	k	Pénalité	RENTEPARGNE Taux garanti 4,50%	BONEPARGNE Taux garanti 7%	FUNEPARGNE Taux garanti 4,50%
Fin de 1ère année	1	5%	0,9546	0,9774	0,9546
Fin de 2ème année	2	3%	1,0185	1,0678	1,0185
Fin de 3ème année	3	1%	1,0863	1,1661	1,0863
Fin de 4ème année	4	0%	1,1467	1,2604	1,1467
Fin de 5ème année	5	0%	1,1983	1,3486	1,1983
Fin de 6ème année	6	0%	1,2522	1,4430	1,2522
Fin de 7ème année	7	0%	1,3085	1,5440	1,3085
Fin de 8ème année	8	0%	1,3674	1,6521	1,3674
Fin de 9ème année	9	0%	1,4289	1,7677	1,4289
Fin de 10ème année	10	0%	1,4932	1,8915	1,4932

g= 4%

Question B

1) Démontrer les formules utilisées

Pour une prime unique brute de 1€, l'épargne acquise garantie est de : $\boxed{\frac{1}{(1+g)} \times (1+i)^k}$

Pour une prime annuelle brute de 1€ payée en début d'année, l'épargne acquise garantie est de :

$$\boxed{\frac{1}{(1+g)} \times \frac{(1+i)^{k+1} - (1+i)}{i}}$$

Pour une prime annuelle brute de 1€ payée en fin d'année, l'épargne acquise garantie est de :

$$\boxed{\frac{1}{(1+g)} \times \frac{(1+i)^k - 1}{i}}$$

2) Compléter les tableaux

Taux garantis :
- RENTEPARGNE : 4,5%
- FUNEPARGNE : 4,5%
- BONEPARGNE : 7,0%

Epargne acquise garantie à la fin de chaque année d'adhésion				
Date du rachat	k	RENTEPARGNE / FUNEPARGNE		BONEPARGNE
		Prime unique brute de 1€	Prime annuelle brute de 1€	Prime unique brute de 1€
Fin de 1ère année	1	1,0048	1,0048	1,0288
Fin de 2ème année	2	1,0500	2,0548	1,1009
Fin de 3ème année	3	1,0973	3,1521	1,1779
Fin de 4ème année	4	1,1467	4,2988	1,2604
Fin de 5ème année	5	1,1983	5,4970	1,3486
Fin de 6ème année	6	1,2522	6,7492	1,4430
Fin de 7ème année	7	1,3085	8,0577	1,5440
Fin de 8ème année	8	1,3674	9,4251	1,6521
Fin de 9ème année	9	1,4289	10,8540	1,7677
Fin de 10ème année	10	1,4932	12,3473	1,8915

Taux garantis :
- RENTEPARGNE : 7,0%
- FUNEPARGNE : 7,0%
- BONEPARGNE : 9,0%

Epargne acquise estimée à la fin de chaque année d'adhésion				
Date du rachat	k	RENTEPARGNE / FUNEPARGNE		BONEPARGNE
		Prime unique brute de 1€	Prime annuelle brute de 1€	Prime unique brute de 1€
Fin de 1ère année	1	1,0288	1,0288	1,0481
Fin de 2ème année	2	1,1009	2,1297	1,1424
Fin de 3ème année	3	1,1779	3,3076	1,2452
Fin de 4ème année	4	1,2604	4,5680	1,3573
Fin de 5ème année	5	1,3486	5,9166	1,4794
Fin de 6ème année	6	1,4430	7,3596	1,6126
Fin de 7ème année	7	1,5440	8,9037	1,7577
Fin de 8ème année	8	1,6521	10,5558	1,9159
Fin de 9ème année	9	1,7677	12,3235	2,0884
Fin de 10ème année	10	1,8915	14,2150	2,2763

Question C

1) Démontrer les formules utilisées

a- PUI pour une rente viagère fractionnée en m versements payables à terme échu :

$$\boxed{PUI = (1+\alpha) \times a_x^{(m)}}$$

b- PUI pour une rente certaine fractionnée en m versements payables à terme échu :

$$\boxed{PUI = (1+\alpha) \times \frac{1}{m} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1/m}}}$$

c- PUI pour une rente viagère réversible fractionnée en m versements payables à terme échu :

$$\boxed{PUI = (1+\alpha) \times \left(a_x + r \times \left(a_y - a_{xy}\right)\right)}$$

2) Démontrer les formules utilisées

a- PUI pour une rente viagère fractionnée en m versements payables à terme échu :

$$\boxed{V'_x = \frac{PUI_x + PUI_{x+1}}{2}}$$

b-PUI pour une rente certaine fractionnée en m versements payables à terme échu pendant n années :

$$\boxed{V' = PUI \quad \text{(sur n-k années)}}$$

c-PUI pour une rente viagère réversible fractionnée en m versements payables à terme échu :

$$\boxed{V'_x = \frac{PUI_x + PUI_{x+1}}{2}}$$

3) Démontrer les formules utilisées

Rente annuelle pour 1€ de capital constitutif : $\boxed{r = \frac{1}{PUI}}$

4) Compléter les tableaux

α = 3%
Taux garanti : 4,5%
Table de mortalité : TV 73 77

Rente viagère immédiate trimestrielle à termes échus			
Age	**Prime Unique d'Inventaire (PUI)**	**Provision d'Inventaire**	**Rente annuelle en % pour 1€ de capital**

60	13,4493	13,2814	7,4354%
61	13,1135	12,9412	7,6257%
62	12,7689	12,5930	7,8315%
63	12,4171	12,2375	8,0534%
64	12,0579	11,8745	8,2933%
65	11,6911	11,5043	8,5535%
66	11,3174	11,1276	8,8359%
67	10,9377	10,7451	9,1427%
68	10,5524	10,3576	9,4765%
69	10,1628	9,9666	9,8398%
70	9,7704	9,5733	10,2350%

Rente certaine trimestrielle à termes échus			
Durée en années	Prime Unique d'Inventaire (PUI)	Provision d'Inventaire	Rente annuelle en % pour 1€ de capital
10	8,2864	8,2864	12,0680%
11	8,9317	8,9317	11,1961%
12	9,5492	9,5492	10,4721%
13	10,1401	10,1401	9,8618%
14	10,7056	10,7056	9,3409%
15	11,2467	11,2467	8,8915%
16	11,7645	11,7645	8,5001%
17	12,2600	12,2600	8,1566%
18	12,7342	12,7342	7,8529%
19	13,1880	13,1880	7,5827%
20	13,6222	13,6222	7,3410%

On suppose que x=y

Rente viagère immédiate trimestrielle à termes échus avec réversion à 60%			
Age	Prime Unique d'Inventaire (PUI)	Provision d'Inventaire	Rente annuelle en % pour 1€ de capital
60	14,7531	14,5930	6,7783%
61	14,4329	14,2680	6,9286%
62	14,1030	13,9336	7,0907%
63	13,7642	13,5902	7,2652%
64	13,4163	13,2377	7,4536%
65	13,0592	12,8763	7,6574%
66	12,6934	12,5063	7,8781%
67	12,3193	12,1285	8,1173%
68	11,9376	11,7432	8,3769%
69	11,5489	11,3517	8,6588%
70	11,1546	10,9550	8,9649%