MOEGLIN INSTITUTE

Actuariat – Finance – Informatique – Formation

Module 2

Mathématiques des Assurances de personnes

Primes et Provisions

Publication: décembre 2017

Alain Moeglin, actuaire, membre certifié de l'Institut des Actuaires IA

Synthèse

Ce module présente les méthodes de calculs de la prime périodique pure, d'inventaire et commerciale les provisions mathématiques correspondantes suivant les trois méthodes prospective, rétrospective et récurrence, et comment procéder pour transformer des contrats.

MOEGLIN INSTITUTE 34 Boulevard du Midi 06150 CANNES LA BOCCA
tél + 33 4 93 90 54 15 fax + 33 4 93 49 91 18
Siret 534 918 073 00030 site www.moeglin.com mail support@moeglin.com

Sommaire

CHAPITRE VI LES PRIMES PERIODIQUES PURES DES OPERATIONS VIAGERES SUR UNE TETE 4

I PRINCIPE GENERAL 5

II EXEMPLES DE PRIMES PURES CONSTANTES 6

III LES PRIMES PURES CONSTANTES FRACTIONNEES 7

1 CALCUL DE LA PRIME FRACTIONNEE EQUIVALENTE A LA PRIME ANNUELLE 7
2 CALCUL DE LA PRIME FRACTIONNEE EQUIVALENTE A LA PRIME ANNUELLE, SANS TENIR COMPTE DE L'ELEMENT VIAGER 8

IV PRIMES ANNUELLES VARIABLES 10

V LES PRIMES NIVELEES 11

CHAPITRE VII LES PROVISIONS MATHEMATIQUES A LA PRIME PURE DES OPERATIONS VIAGERES SUR UNE TETE 15

VI INTRODUCTION 16

VII LES METHODES DE CALCUL DES PROVISIONS MATHEMATIQUES 17

1 LA METHODE PROSPECTIVE 17
2 LA METHODE RETROSPECTIVE 19
3 LA METHODE DE RECURRENCE 21
4 PRESENTATION COMPTABLE 24
5 COMPARAISON DES METHODES 25
a Méthode prospective 25
b Méthode rétrospective 25
c Méthode de récurrence 25
d Schéma récapitulatif 25

VIII EXEMPLE DE CALCUL DE LA PROVISION PURE 26

1 CAS D'UNE TEMPORAIRE DECES 26
2 CAS D'UN CAPITAL DIFFERE 27
3 APPLICATION NUMERIQUE METHODE PROSPECTIVE 28
4 APPLICATION NUMERIQUE AVEC LES 3 METHODES 31

IX CALCUL DES PROVISIONS A UNE DATE T QUELCONQUE 32

1 METHODE 1 : INTERPOLATION LINEAIRE DES PROVISIONS AUX DATES ANNIVERSAIRES 32
2 METHODE 2 : INTERPOLATION LINEAIRE DES PROVISIONS AVEC CORRECTION DE PRIME 33
3 METHODE 3 : INTERPOLATION LINEAIRE DES EFFECTIFS LX DE LA TABLE DE MORTALITE 34
4 EXEMPLE : CALCUL DE PROVISIONS D'UN CONTRAT VIE ENTIERE 35

CHAPITRE VIII LES PRIMES D'INVENTAIRE ET COMMERCIALES LES PROVISIONS MATHEMATIQUES CORRIGEES 37

X TABLE ET TAUX EN VIGUEUR **38**

a Tables en vigueur *38*
b Taux techniques en vigueur (article A132-1 du code des assurances) *39*
c Historiques des derniers taux *40*
d Graphe des derniers taux *44*

XI LES PRIMES D'INVENTAIRE ET COMMERCIALES **45**

1 LES CHARGEMENTS UTILISES 45
2 CALCUL DE LA PRIME BRUTE OU COMMERCIALE 45
3 LES VALEURS DES CHARGEMENTS 46
4 LA PRIME D'INVENTAIRE 46
5 EXEMPLES DE PRIMES D'INVENTAIRES ET BRUTES 47
a Capital différé *47*
b Rente viagère immédiate fractionnée *47*
c Rente viagère différée fractionnée *47*
d Temporaire décès *48*

XII LES PROVISIONS MATHEMATIQUES CORRIGEES **49**

1 PRINCIPE GENERAL DU CALCUL 49
2 CONTRE-ASSURANCE DES PRIMES VERSEES 50

CHAPITRE IX TRANSFORMATION DES CONTRATS **51**

XIII INTRODUCTION **52**

XIV CHANGEMENT DE LA DUREE DE PAIEMENT DES COTISATIONS ET DE LEUR FRACTIONNEMENT **52**

XV PROROGATION D'ECHEANCE POUR FINANCER UNE AGGRAVATION DU RISQUE. **53**

XVI TRANSFORMATION QUELCONQUE **53**

XVII REDUCTION, RACHAT **54**

Chapitre VI

Les primes périodiques pures

des opérations viagères sur une tête

I Principe général

Les opérations viagères sur une tête sont souscrites en général contre des primes périodiques toujours payables en début de période.

Ces primes ne sont pas dues après le décès de l'assuré. Le nombre de primes est aléatoire.

Elles constituent des annuités viagères à termes anticipés, temporaires sur une durée p.

La prime annuelle est généralement constante.

On la calcule de la manière suivante:

La prime annuelle pure P est solution de l'équation:

Valeur actuelle probable à la souscription des engagements futurs de **l'assuré** = Valeur actuelle probable à la souscription des engagements futurs de **l'assureur** notée ∂_x

$$\boxed{P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = \partial_x}$$

II Exemples de primes pures constantes

Type de contrat	Durée p de paiement des primes pures	Equation	Valeur de la prime annuelle pure
Capital différé de 1 €	$p \leq n$	$P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = {}_nE_x$	$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$
Rente viagère différée de k années, illimitées à termes annuels échus de 1 €	$p \leq k$	$P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = {}_{k\rceil}a_x$	$P = \frac{N_{x+k+1}}{N_x - N_{x+p}}$
<u>Vie entière illimitée</u> Capital de 1 € payable immédiatement au décès	p	$P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = \overline{A}_x$	$P = \frac{M_x}{N_x - N_{x+p}}$
<u>Assurance mixte</u> Capital de 1 € payable immédiatement au décès ou au terme du contrat	$p \leq n$	$P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = \overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	$P = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$
<u>Assurance à terme fixe</u> Capital de 1 € payable au terme du contrat assuré décédé ou vivant	$p \leq n$	$P \times \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = v^n$	$P = \frac{v^n}{N_x - N_{x+p}}$

III Les primes pures constantes fractionnées

1 Calcul de la prime fractionnée équivalente à la prime annuelle

Les primes périodiques peuvent être fractionnées, c'est-à-dire payables par semestre, trimestre ou par mois.

Soit $P^{[m]}$ la prime fractionnée par m^{ème} .

On a les relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{r} P^{[m]} \times \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \partial_x \\ P \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \partial_x \end{array}\right\} \text{ d'où } P^{[m]} = P \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}$$

On sait que: $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right)$

D'où: $$P^{[m]} = P \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right)} = P \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right) + \frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right)}$$

$$P^{[m]} = P\left(1+\frac{1}{\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\frac{m-1}{2m}\left(1-{}_nE_x\right)} - 1}\right) = P\left(1+c(x)\right)$$

Le coefficient c(x) dépend peu de l'âge.
Il corrige le déficit de primes lié à l'effet de la mortalité qui entraîne un encaissement des primes fractionnées plus faible.

Exemple de calcul du rapport $\frac{P^{[m]}}{P} = 1 + c(x)$

Paramètres: $\begin{cases} \text{Table : TV } 73/77 \\ \text{Taux : } \quad i = 4{,}50\% \\ \text{Durée : } \quad n = 10 \text{ ans} \end{cases}$

Age	30 ans	40 ans	50 ans	60 ans
$\frac{P^{[2]}}{P}$	1,011	1,011	1,012	1,013
$\frac{P^{[4]}}{P}$	1,017	1,017	1,018	1,021
$\frac{P^{[12]}}{P}$	1,020	1,021	1,023	1,025

En pratique, on utilise souvent les valeurs majorées suivantes:

$$\text{prime semestrielle} = \frac{P^{[2]}}{2} = \frac{P}{2} \times 1{,}02$$

$$\text{prime trimestrielle} = \frac{P^{[4]}}{4} = \frac{P}{4} \times 1{,}03$$

$$\text{prime mensuelle} = \frac{P^{[12]}}{12} = \frac{P}{12} \times 1{,}04$$

<u>Incidences du fractionnement:</u>

Le fractionnement de la prime annuelle implique une compensation financière pour faire face:

- à la perte de primes fractionnées due à la mortalité,
- aux frais administratifs supplémentaires de gestion du fractionnement,
- aux produits de placements non encaissés du fait du fractionnement.

2 Calcul de la prime fractionnée équivalente à la prime annuelle, sans tenir compte de l'élément viager

On a l'équivalence financière suivante, entre les valeurs actuelles:

$$\boxed{P = \frac{P^{[m]}}{m}\left[1 + v_m^1 + v_m^2 + \ldots + v_m^{m-1}\right] = \frac{P^{[m]}}{m}\left[\frac{v_m^m - 1}{v_m - 1}\right]}$$

$$\text{avec}\begin{cases}(1+i_m)^m = (1+i)\\ v_m^t = v^{t/m}\\ v_m = 1/(1+i_m)\end{cases}\qquad \text{où :}\begin{cases}i_m = \text{taux fractionné}\\ i = \text{taux annuel}\end{cases}$$

Approximation de $v^{t/m}$

$$\begin{cases}\dfrac{i}{(1+i)} = iv = d\\ v = (1-d)\end{cases}\quad \text{d'où}\quad v^{t/m} \cong \left(1-\frac{t}{m}d\right)$$

$$P = \frac{P^{[m]}}{m}\sum_{t=0}^{m-1} v_m^t = \frac{P^{[m]}}{m}\sum_{t=0}^{m-1} v^{t/m} \cong \frac{P^{[m]}}{m}\sum_{t=0}^{m-1}\left(1-\frac{t}{m}d\right)$$

$$P = \frac{P^{[m]}}{m}\left(m - \frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{m}d\right) = P^{[m]}\left(1 - \frac{(m-1)}{2m}d\right)$$

En prenant i =4,50%, on obtient les valeurs suivantes:

$\frac{P^{[2]}}{P}$	1,0108
$\frac{P^{[4]}}{P}$	1,0164
$\frac{P^{[12]}}{P}$	1,0203

Ces valeurs sont voisines de celles obtenues en tenant compte de l'élément viager.

IV Primes annuelles variables

Les primes annuelles peuvent, par exemple, augmenter suivant une progression arithmétique de raison h, c'est-à-dire:

Prime	Age
P	x
P(1+h)	x+1
	…
P(1+(p-1)h)	x+p-1

On obtient la relation: $\left(P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + h\ P\ (Ia)_{x:\overline{p-1}|}\right) = \partial_x$

En pratique, l'assureur demande une prime périodique constante calculée par équivalence des valeurs actuelles, à la souscription.

V Les primes nivelées

La prime annuelle constante d'un contrat correspond à la prime nivelée.

Par exemple, pour un contrat Temporaire Décès, la prime annuelle pure ou prime pure nivelée est la suivante:

$$P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$$

En prenant : $\begin{cases} x = 40 \text{ ans} \\ i = 4{,}50\% \\ \text{Table TD } 73/77 \\ \text{Durée p de paiement des primes} = 30 \text{ ans} \\ \text{Durée n du contrat} = 30 \text{ ans} \end{cases}$

on obtient : $P = \dfrac{M_{40} - M_{70}}{N_{40} - N_{70}} = \dfrac{4487{,}79 - 1749{,}46}{271420{,}94 - 22057{,}47} = 0{,}01098$

Pour un capital de 10 000 €, la prime annuelle pure nivelée est égale à 10 000 x 0,01098 = **109,80 €**

Cette cotisation permet à l'assureur de verser un capital de 10 000 € au décès de l'assuré, s'il survient entre 40 et 70 ans.

Cette cotisation devient égale à:
- 209,81 € pour une durée p=10 ans
- 131,75 € pour une durée p=20 ans

On aurait pu demander à l'assuré de verser chaque année la prime annuelle de risque qui couvre exactement le risque annuel de décès.

La prime annuelle de risque est croissante d'année en année, elle est égale à:

$$\text{Capital} \times q_{x+t} \times v^{1/2} = 10000 \times q_{x+t} \times 1{,}045^{-1/2}$$

q_{x+t} est la probabilité de décès entre les âges x+t et x+t+1.

Dans notre exemple, les primes annuelles de risques sont les suivantes:

Age	Primes annuelles de risque
40	$10\,000 \times 0.003465 \times 1.045^{-0.5} =$ 33,89
41	37,37
42	41,73
43	46,99
44	52,42
45	57,41
46	61,83
47	66,99
48	72,90
49	79,38
50	85,78
51	92,35
52	99,76
53	108,76
54	118,51
55	127,89
56	136,79
57	146,04
58	156,77
59	169,82
60	185,65
61	203,86
62	222,47
63	241,05
64	261,84
65	285,98
66	312,48
67	341,26
68	370,72
69	403,11

Le risque décès augmente avec l'âge ainsi que la prime de risque.

Si l'assuré verse en début de chaque année la somme exactement suffisante pour garantir son décès au cours de l'année, on constate dans notre exemple que cette somme:

- d'abord minime à 40 ans, soit 33,89 € pour 10 000 € de capital versé si le décès survient entre 40 et 41 ans,
- croît rapidement avec l'âge,
- pour atteindre 403,11 € à 69 ans, toujours pour 10 000 € de capital versé, si le décès survient entre 69 et 70 ans.

La prime de risque devient alors environ 12 fois plus importante qu'à 40 ans

L'inconvénient du système d'appel de la prime de risque annuelle est évident.

L'augmentation rapide de la cotisation génère la résiliation prématurée des contrats souscrits, pour les clients non familiarisés aux calculs viagers.

Aussi l'usage s'est rapidement établi de demander aux assurés le paiement de primes annuelles nivelées.

Dans notre exemple, la prime nivelée est de **109,80 €.**

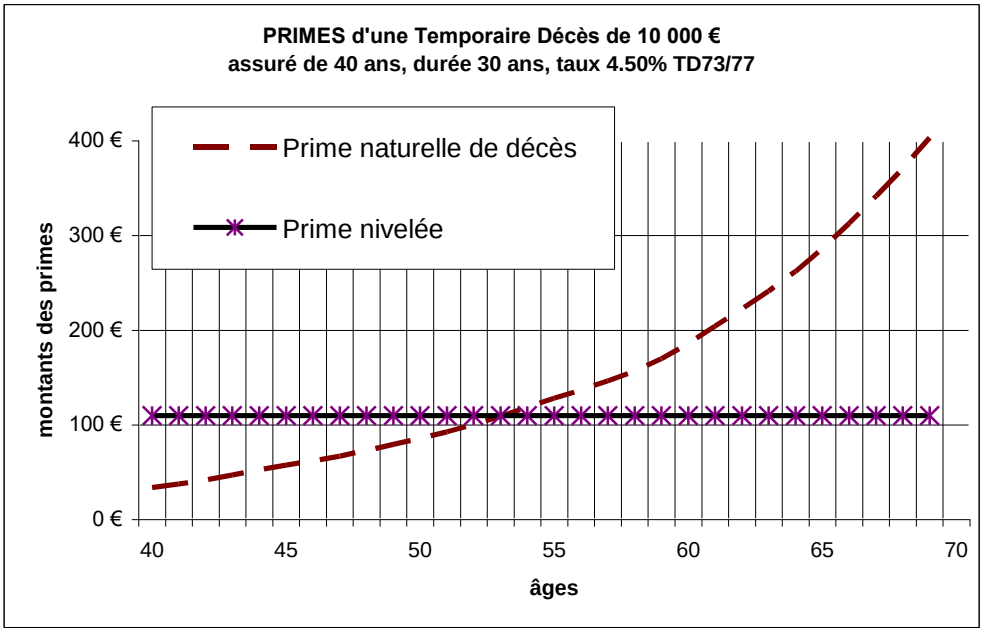
L'assureur prélève 33,89 € à 40 ans, qui correspond à la prime de risque la première année.

Cette prime s'ajoute à d'autres pour régler les sinistres de cette année.

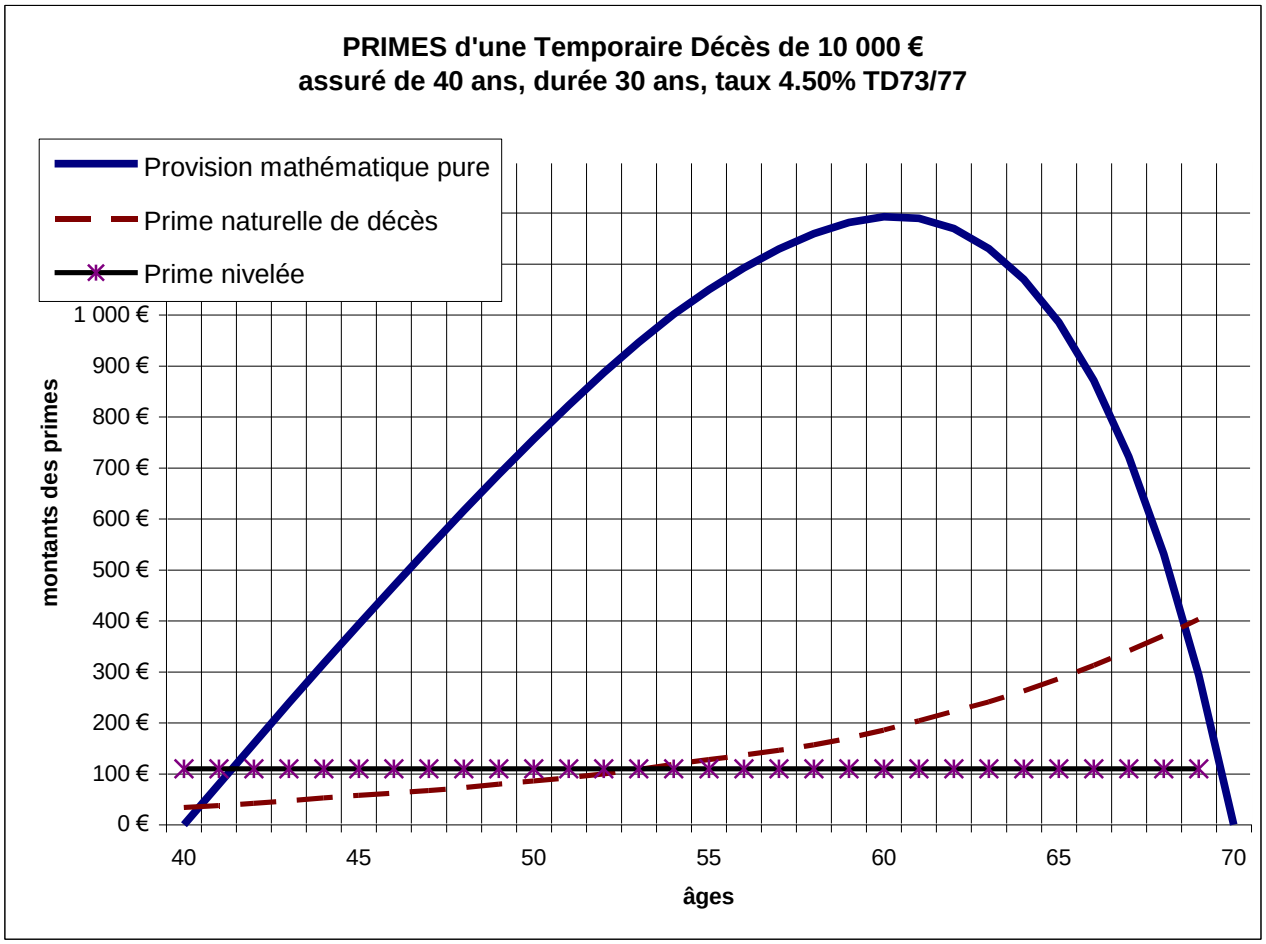
L'assureur met en réserve la différence 109,80-33,89=75,91 € de manière à faire face à ses engagements futurs.

Dans notre exemple, la prime nivelée devient inférieure à la prime de risque, à partir de 53 ans.

Les suppléments de primes encaissés avant 53 ans et mis en réserve permettent de compenser la prime nivelée plus faible, appelée après cet âge.



Les provisions à constituer sont les suivantes, en fonction de l'âge :



Chapitre VII

Les provisions mathématiques à la prime pure des opérations viagères sur une tête

VI Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé une prime annuelle nivelée en égalisant, à la souscription du contrat, les valeurs actuelles probables des engagements de l'assureur et de l'assuré.

Ce calcul est établi de manière à ce que les excédents de primes (différence prime nivelée - prime de risque) en début de période compensent les déficits de primes en fin de période.

Ces excédents techniques sont mis en réserves et permettent à l'assureur de faire face à ses engagements futurs.

Ces réserves trouvent exactement leur emploi si on capitalise ces sommes au taux du tarif et si la mortalité réelle est égale à la mortalité théorique utilisée dans le calcul de la prime nivelée.

On appelle Provisions Mathématiques le total des réserves calculées pour chaque contrat en cours, à la clôture de chaque exercice comptable de l'assureur.

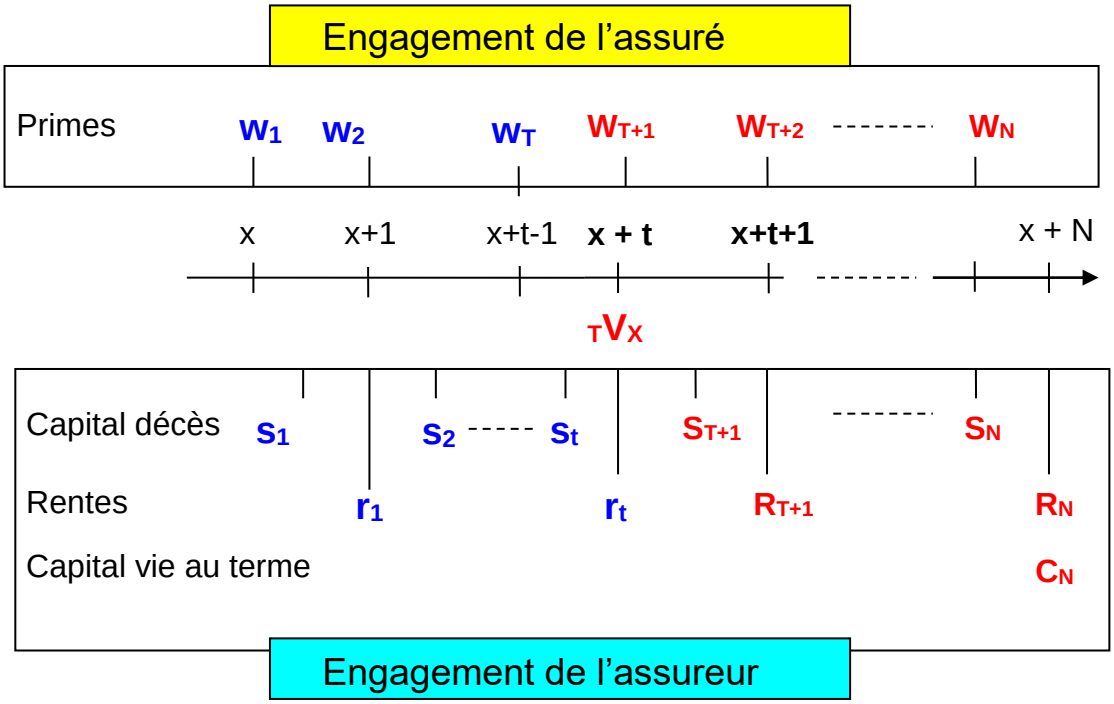
VIILes méthodes de calcul des provisions mathématiques

1 La méthode prospective

Formule générale

Soit les engagements suivants:

- l'assuré règle chaque année une prime annuelle w_t, en début de la période t
- l'assureur règle:
  - un capital s_t au décès de l'assuré,
  - une rente r_t en cas de vie de l'assuré, en fin de période.
  - Un capital C_n en cas de vie de l'assuré, au terme du contrat.



La provision mathématique à la prime pure notée ${}_tV_x$ ou bien V_{x+t} , calculée à la date x+t, suivant la **méthode prospective**, immédiatement **avant** le paiement de la prime W_{t+1} est égale à:

$${}_tV_x = \begin{cases} \text{Valeur actuelle probable à l'âge x+t, des engagements futurs de l'ASSUREUR} \\ - \\ \text{Valeur actuelle probable à l'âge x+t, des engagements futurs de l'ASSURE} \end{cases}$$

$${}_tV_x = \begin{cases} \left(\sum_{k=t}^{n-1} S_{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_{x+t}} v^{k-t+1/2} + \sum_{k=t+1}^{n} R_k \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} v^{k-t} + C_n \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} v^{n-t} \right) \\ - \\ \left(\sum_{k=t}^{n-1} W_{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} v^{k-t} \right) \end{cases}$$

(On a pris en compte tous les flux notés en **MAJUSCULE**, dans le schéma et de couleur rouge)

Remarques

Pour un contrat à Prime Unique, l'assuré ne verse qu'une seule prime W1 à la souscription, toutes les autres primes sont nulles (W2 à Wn).

Pour un contrat à Prime Périodique, la durée de versement des primes appelée P peut être inférieure à la durée n du contrat. Il faut donc en tenir compte dans les formules de calculs des provisions.

la Valeur actuelle probable à l'âge x+t, des engagements futurs de l'ASSURE est égale

$$= \begin{cases} \left(\sum_{k=t}^{p-1} W_{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} v^{k-t} \right) & \text{si } t<p \\ ou & \\ 0 & \text{si } t>=p \end{cases}$$

A la souscription du contrat, la provision est nulle. Cette équation permet de calculer le montant de la prime unique ou de la prime périodique nivelée.

$${}_0V_x = 0$$

Au terme du contrat, la provision est nulle, si l'assureur et l'assuré n'ont plus aucun engagement, ce qui le cas général.

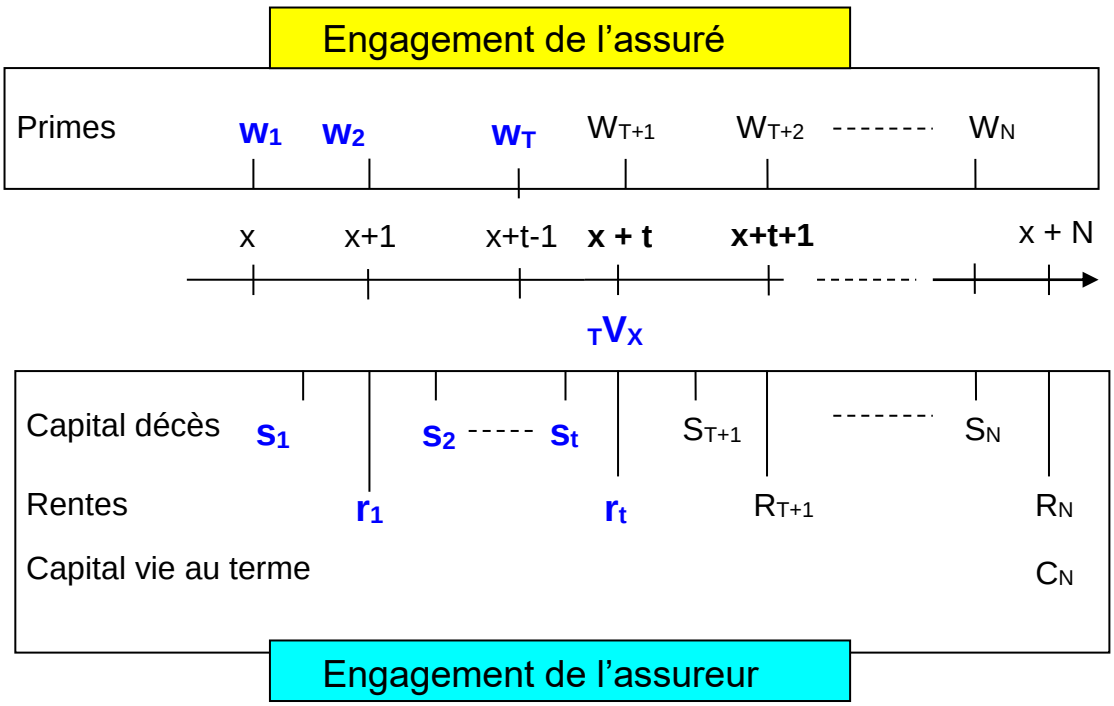
$${}_nV_x = 0$$

Attention, par exemple pour un contrat capital différé, l'assureur doit encore verser au terme du contrat le capital prévu C si l'assuré est vivant et donc ${}_nV_x = C$

Pour un produit d'épargne, la provision mathématique est égale au montant de l'épargne inscrite dans le compte de l'assuré, à la date de calcul (valeur acquise).

2 La méthode rétrospective

Formule générale en reprenant les engagements définis précédemment



La provision mathématique à la prime pure notée ${}_tV_x$, calculée à la date x+t, suivant la méthode rétrospective, immédiatement avant le paiement de la prime W_{t+1} est la suivante:

- On sait que ${}_0V_x = 0$

C'est-à-dire:

$$\boxed{{}_0V_x = \left(\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k + C_n \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} W_{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k \right) = 0}$$

- Soit ${}_tI_x = \dfrac{1}{{}_tE_x} = \dfrac{l_x}{l_{x+t}} v^{-t}$
- ${}_0V_x \times {}_tI_x = {}_0V_x \dfrac{l_x}{l_{x+t}} v^{-t} = 0$

On décompose la somme en deux parties :

$$\begin{cases} \dfrac{l_x}{l_{x+t}}\ v^{-t}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{t-1} S_{k+1}\ \frac{d_{x+k}}{l_x}\ v^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{t} R_k\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{t-1} W_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right)\right] \\ + \\ \dfrac{l_x}{l_{x+t}}\ v^{-t}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=t}^{n-1} S_{k+1}\ \frac{d_{x+k}}{l_x}\ v^{k+1/2} + \sum_{k=t+1}^{n} R_k\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k + C_n\ \frac{l_{x+n}}{l_x}\ v^n\right) - \left(\sum_{k=t}^{n-1} W_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right)\right] \\ = 0 \end{cases}$$

Par définition, la provision en méthode prospective est égale à

$$ {}_tV_x = \left(\sum_{k=t}^{n-1} S_{k+1}\ \frac{d_{x+k}}{l_{x+t}}\ v^{k-t+1/2} + \sum_{k=t+1}^{n} R_k\ \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}}\ v^{k-t} + C_n\ \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}}\ v^{n-t}\right) - \left(\sum_{k=t}^{n-1} W_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}}\ v^{k-t}\right) $$

d'où la relation :

$$\begin{cases} \dfrac{l_x}{l_{x+t}}\ v^{-t}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{t-1} S_{k+1}\ \frac{d_{x+k}}{l_x}\ v^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{t} R_k\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{t-1} W_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right)\right] \\ + \\ {}_tV_x \\ = 0 \end{cases}$$

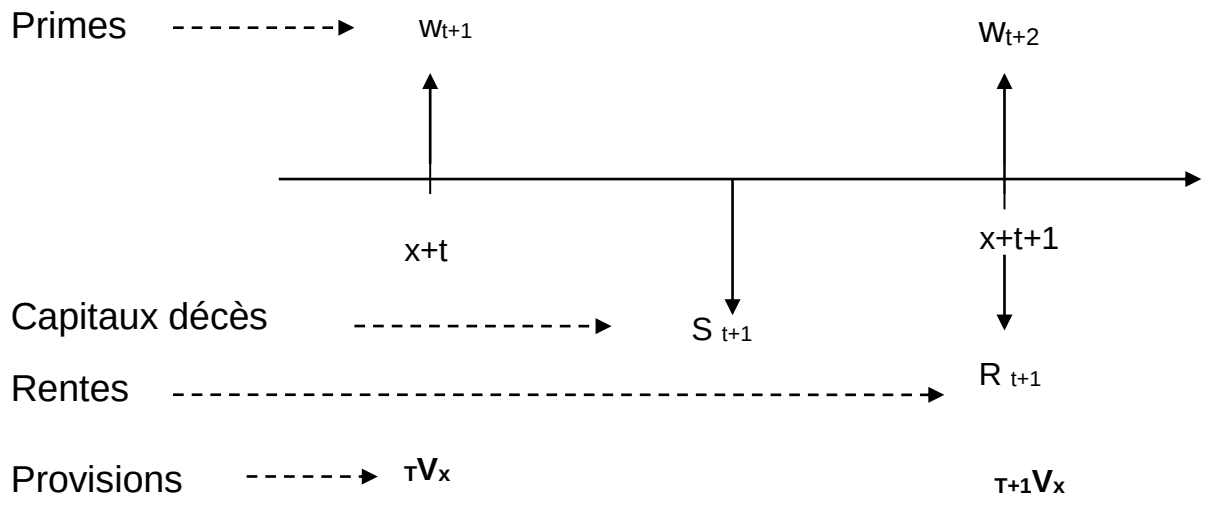
Finalement

$$ {}_tV_x = \underset{\substack{\text{facteur de}\\ \text{capitalisation}\\ \text{viagère à l'âge x}\\ \text{pour les t}\\ \text{premières années}}}{{}_tI_x} \left[\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{t-1} W_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right)}_{\substack{\text{Valeur actuelle probable}\\ \text{à la souscription des}\\ \text{engagements futurs de l'assuré}\\ \text{pour les t premières années}}} - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{t-1} S_{k+1}\ \frac{d_{x+k}}{l_x}\ v^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{t} R_k\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right)}_{\substack{\text{Valeur actuelle probable}\\ \text{à la souscription des}\\ \text{engagements futurs de l'assureur}\\ \text{pour les t premières années}}} \right] $$

$$ {}_tV_x = \begin{cases} \text{Valeur acquise par capitalisation viagère, pour les t premières années,} \\ \text{des engagements de l'ASSURE} \\ - \\ \text{Valeur acquise par capitalisation viagère, pour les t premières années,} \\ \text{des engagements de l'ASSUREUR} \end{cases} $$

(On a pris en compte tous les flux notés en **minuscule et de couleur bleue**, dans le schéma)

3 La méthode de récurrence



Si nous calculons d'année en année, par la méthode **rétrospective**, les provisions mathématiques à la prime pure des engagements définis précédemment, nous obtenons:

- **Méthode rétrospective pour la première année**:

$$\boxed{\begin{aligned} &{}_1V_x = {}_1I_x \left(W_1 - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v \right) \\ &soit \\ &{}_1V_x \times {}_1E_x = \left(W_1 - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v \right) \end{aligned}}$$

- **Méthode rétrospective pour la deuxième année**:

$$\boxed{{}_2V_x = {}_2I_x \left(W_1 + W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 \right)}$$

$${}_2V_x \; {}_2E_x = \left(W_1 - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v \right) + \left(W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 \right)$$

$${}_2V_x \; {}_2E_x = {}_1V_x \; {}_1E_x + \left(W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 \right)$$

En divisant les 2 termes par ${}_1E_x$, on obtient:

$${}_2V_x \frac{{}_2E_x}{{}_1E_x} = {}_2V_x \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} v = {}_1V_x + \left(W_2 - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} v^{1/2} - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} v \right)$$

C'est-à-dire : $\boxed{{}_1V_x + W_2 = \left(q_{x+1} \; s_2 \; v^{1/2}\right) + \left(p_{x+1} \; r_2 \; v\right) + \left(p_{x+1} \; {}_2V_x \; v\right)}$

Pour la t-1ème année, on suppose que la relation de récurrence est vraie

$$\boxed{{}_{t-1}V_x + W_t = \left(q_{x+t-1}\ s_t\ v^{1/2}\right) + \left(p_{x+t-1}\ r_t\ v\right) + \left(p_{x+t-1}\ {}_tV_x\ v\right)}$$

On va démontrer que la relation est vraie au rang t

- **Méthode rétrospective pour la t ème année** donne la relation

$$\boxed{{}_tV_x = {}_tI_x \begin{pmatrix} W_1 + W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots + W_t \frac{l_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1} \\ - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - \ldots - s_t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1+1/2} \\ - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 - \ldots - r_t \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t \end{pmatrix}}$$

- **Méthode rétrospective pour la (t+1) ème année** donne la relation

$$\boxed{{}_{t+1}V_x = {}_{t+1}I_x \begin{pmatrix} W_1 + W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots + W_t \frac{l_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1} + W_{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t \\ - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - \ldots - s_t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1+1/2} - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+1/2} \\ - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 - \ldots - r_t \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+1} \end{pmatrix}}$$

Qui peut aussi s'écrire comme ci-dessous en faisant apparaître les flux de ${}_tV_x$:

$$\boxed{\begin{aligned} {}_{t+1}V_x \times {}_{t+1}E_x &= \begin{pmatrix} W_1 + W_2 \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots + W_t \frac{l_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1} \\ - s_1 \frac{d_x}{l_x} v^{1/2} - s_2 \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+1/2} - \ldots - s_t \frac{d_{x+t-1}}{l_x} v^{t-1+1/2} \\ - r_1 \frac{l_{x+1}}{l_x} v - r_2 \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 - \ldots - r_t \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t \\ + \\ + W_{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+1/2} - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+1} \end{pmatrix} \\ {}_{t+1}V_x \times {}_{t+1}E_x &= \begin{pmatrix} \frac{{}_tV_x}{{}_tI_x} \\ + \\ + W_{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+1/2} - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+1} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

En divisant les 2 termes de l'équation par ${}_tE_x = \frac{1}{{}_tI_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t$, on obtient:

$$ {}_{t+1}V_x \frac{{}_{t+1}E_x}{{}_tE_x} = \left(\frac{\frac{{}_tV_x}{{}_tI_x \times {}_tE_x} + \frac{W_{t+1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+1/2} - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+1}}{\frac{l_{x+t}}{l_x} v^t}} \right) = {}_tV_x + W_{t+1} - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} v^{1/2} - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} v^1 $$

$$ {}_{t+1}V_x \times \frac{{}_{t+1}E_x}{{}_tE_x} = {}_{t+1}V_x \times \frac{\frac{l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+1}}{\frac{l_{x+t}}{l_x} v^t} = {}_{t+1}V_x \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} $$

d'où

$$ {}_{t+1}V_x \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} = V_x + W_{t+1} - s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} v^{1/2} - r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} v^1 $$

et on obtient la relation de récurence entre les provisions de t et t+1

$$ {}_tV_x + W_{t+1} = s_{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} v^{1/2} + r_{t+1} \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} v \ + {}_{t+1}V_x \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} v $$

la relation est donc démontrée pour l'année t
la relation étant vraie pour l'année 1, 2, …t, elle donc vraie quelles que soient les années de 1 et n

La relation de récurrence est donc la suivante :

$$ \boxed{{}_tV_x + W_{t+1} = \left(q_{x+t} \ s_{t+1} \ v^{1/2}\right) + \left(p_{x+t} \ r_{t+1} \ v\right) + \left(p_{x+t} \ {}_{t+1}V_x \ v\right)} $$

On peut dire que la provision ${}_tV_x$ augmentée de la prime W_{t+1} qui va être payée d'avance, servira:

- à régler le capital s_{t+1} en cas de décès de l'assuré au cours de la t^ème^ année,
- à régler le capital r_{t+1} en cas de vie de l'assuré à la fin de la t^ème^ année,
- à constituer la réserve en cas de vie de l'assuré à la fin de la t^ème^ année, c'est-à-dire ${}_{t+1}V_x$.

4 Présentation comptable

Reprenons la formule de récurrence :

$$\boxed{{}_tV_x + W_{t+1} = \left(q_{x+t}\ \ s_{t+1}\ \ v^{1/2}\right) \ + \ \left(p_{x+t}\ \ r_{t+1}\ \ v\right) \ + \ \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x\ \ v\right)}$$

En faisant apparaître le taux technique annuel i, cette relation devient :

$$\left({}_tV_x + W_{t+1}\right)(1+i) = \left(q_{x+t}\ \ s_{t+1}\ \ (1+i)^{1/2}\right) + \left(p_{x+t}\ \ r_{t+1}\right) + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x\right)$$

Soit :

$$\left(q_{x+t}\ \ s_{t+1}\right) + \left(q_{x+t}\ \ s_{t+1}\left((1+i)^{1/2} - 1\right)\right) + \left(p_{x+t}\ \ r_{t+1}\right) + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x\right) = W_{t+1}(1+i) + {}_tV_x(1+i)$$

Et enfin :

$$\boxed{\left(q_{x+t}\ \ s_{t+1}\right) + \left(p_{x+t}\ \ r_{t+1}\right) + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x - {}_tV_x\right) = W_{t+1} + i \times W_{t+1} + i \times {}_tV_x - q_{x+t} \cdot s_{t+1}\left((1+i)^{1/2} - 1\right)}$$

Cette dernière relation peut être représentée dans le compte d'exploitation théorique suivant:

COMPTE D'EXPLOITATION THEORIQUE à la date x+t+1, pour la période x+t, x+t+1

Débit	Crédit
Prestations probables	***Primes pures*** W_{t+1}
Capitaux décès $q_{x+t}\ \ s_{t+1}$	
Capitaux vie $p_{x+t}\ \ r_{t+1}$	***Produits financiers aux taux i du tarif***
Dotations aux provisions de l'exercice	+ intérêts sur primes v $i \times W_{t+1}$
$p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x - {}_tV_x$	- intérêts sur les capitaux probables décès sur 1/2 année $-\ q_{x+t}\ \ s_{t+1}\left((1+i)^{1/2} - 1\right)$
	- intérêts sur les capitaux probables vie sur une durée nulle (ils sont réglés en fin de période, dans nos hypothèses)
	+ intérêts sur les provisions sur une année $i \times {}_tV_x$
Solde = 0	

Compte tenu de notre relation de récurrence, le solde de ce compte d'exploitation théorique est nul, entre t et t+1. Il en est de même entre t et t'.
En pratique, on utilise ce compte en considérant l'ensemble des contrats. On considère que les prestations (capitaux et rentes) sont payées en moyenne en milieu d'année et que les cotisations sont encaissées en moyenne également en milieu d'année.

5 Comparaison des méthodes

a Méthode prospective

La méthode de calcul des provisions mathématiques dites **prospective** doit être utilisée de préférence aux méthodes rétrospectives et de récurrence.

La dette future de l'assureur envers l'assuré est estimée dans une optique prospective.

b Méthode rétrospective

La méthode **rétrospective** donne les mêmes résultats que la méthode prospective, si les paramètres (table de mortalité et taux technique) n'évolue pas depuis la souscription.

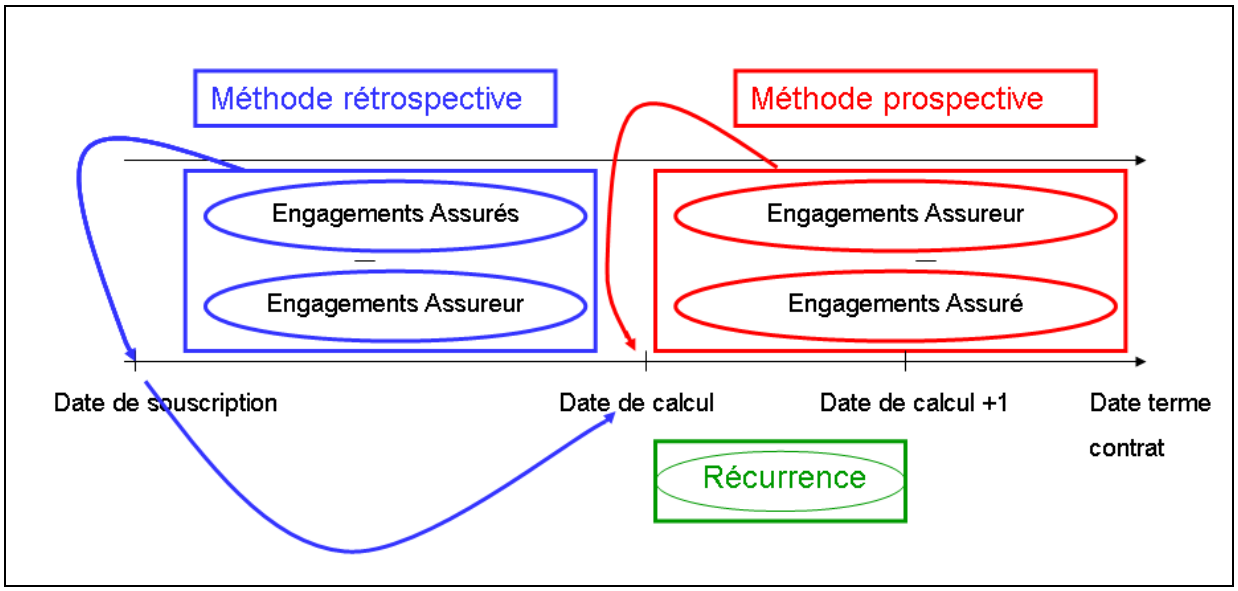
En réalité, les tables évoluent pour tenir compte de l'allongement de la durée de vie humaine.

La provision rétrospective, calculée avec les paramètres initiaux, est alors sous-évaluée par rapport à une provision calculée avec les nouveaux paramètres, notamment pour une garantie capital différé ou rente viagère.

c Méthode de récurrence

La méthode de **récurrence** cumule les erreurs et ne permet pas d'ajuster immédiatement les coefficients de provisions, en cas de changement de tables ou de taux de mortalité.

d Schéma récapitulatif



VIII Exemple de calcul de la provision pure

1 Cas d'une temporaire décès

En utilisant la méthode prospective, pour une temporaire décès de n années de capital C, à primes annuelles P nivelées payables d'avance pendant p années, on obtient la relation suivante:

Calcul de la Prime annuelle nivelée P

$$\boxed{P = C\,\frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}}$$

Provision méthode PROSPECTIVE

$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall\ t\ \in[0,p-1], & {}_tV_x = C\ .\ \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} & -P\ .\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} \\ \forall\ t\ \in[p,n-1], & {}_tV_x = C\ .\ \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} & -\quad 0 \\ t\ = n, & {}_tV_x = \quad 0 & -\quad 0 \end{array}}$$

Provision méthode RETROSPECTIVE

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall\ t\ \in[0,p-1], & {}_tV_x = \dfrac{1}{{}_tE_x}\left[P\ .\ \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - C\ .\ \overline{A}^{1}_{x:\overline{t}|}\right] \\ \forall\ t\ \in[p,n], & {}_tV_x = \dfrac{1}{{}_tE_x}\left[P\ .\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} - C\ .\ \overline{A}^{1}_{x:\overline{t}|}\right] \end{array}}$$

Provision méthode RECURENCE

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\ t\ \in[0,p-1], \quad {}_tV_x + P = \left(q_{x+t}\ \ C\ \ v^{1/2}\right) + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x\ \ v\right) \\ \forall\ t\ \in[p,n-1], \quad {}_tV_x + 0 = \left(q_{x+t}\ \ C\ \ v^{1/2}\right) + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_x\ \ v\right) \\ \\ \text{remarque pour t=n} \quad {}_nV_x = 0 \\ p_{x+t} = \dfrac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \quad q_{x+t} = \dfrac{d_{x+t}}{l_{x+t}} = \dfrac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \end{array}}$$

2 Cas d'un capital différé

En utilisant la méthode prospective, pour un capital C différé de n années, à primes annuelles P nivelées payables d'avance pendant p années, on obtient la relation suivante:

Calcul de la Prime annuelle nivelée P

$$\boxed{P = C\,\frac{{}_{n}E_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}}$$

Provision méthode PROSPECTIVE

$$\forall\ t \in [0, p-1], \qquad {}_{t}V_{x} = C\,.\,{}_{n-t}E_{x+t} - P\,.\,\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|}$$

$$\forall\ t \in [p, n], \qquad {}_{t}V_{x} = C\,.\,{}_{n-t}E_{x+t} - 0$$

$$\text{remarque pour } t = n, \quad {}_{n}V_{x} = C - 0 = C$$

Provision méthode RETROSPECTIVE

$$\forall\ t \in [0, p-1], \qquad {}_{t}V_{x} = \frac{1}{{}_{t}E_{x}}\left[P\,.\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} - 0\right]$$

$$\forall\ t \in [p, n], \qquad {}_{t}V_{x} = \frac{1}{{}_{t}E_{x}}\left[P\,.\,\ddot{a}_{x:\overline{p}|} - 0\right]$$

$$\text{remarque pour } t = n, \quad {}_{n}V_{x} = \frac{1}{{}_{n}E_{x}}\left[P\,.\,\ddot{a}_{x:\overline{p}|} - 0\right] = \frac{1}{{}_{n}E_{x}}\left[\frac{C\,.\,{}_{n}E_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}\,.\,\ddot{a}_{x:\overline{p}|} - 0\right] = C$$

Provision méthode RECURENCE

$$\forall\ t \in [0, p-1], \qquad {}_{t}V_{x} + P = \quad + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_{x}\ \ v\right)$$

$$\forall\ t \in [p, n-1], \qquad {}_{t}V_{x} + 0 = \quad + \left(p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_{x}\ \ v\right)$$

$$\text{pour } t{=}n \text{ on obtient } {}_{n}V_{x} = C$$

3 Application numérique méthode prospective

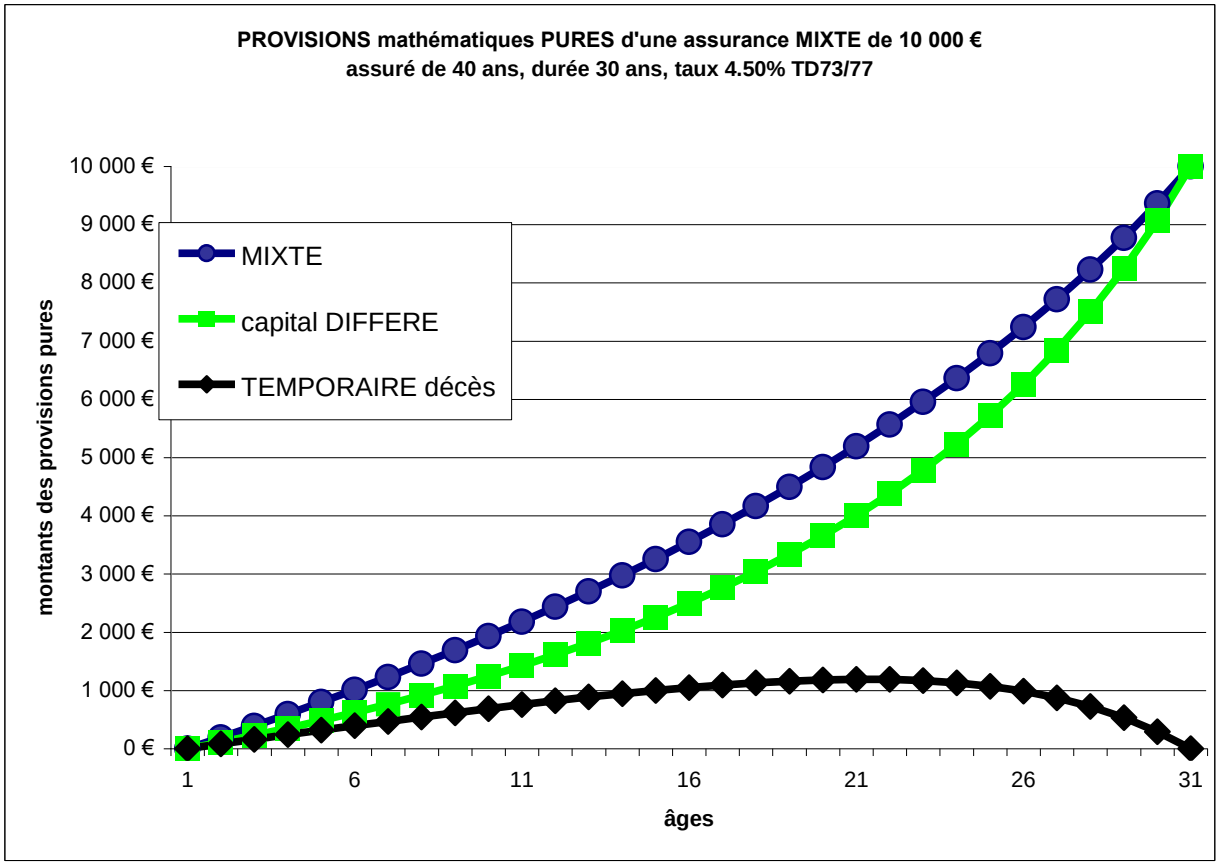
En prenant, les paramètres: $\begin{cases} x = 40 \text{ ans} \\ i = 4{,}50\% \\ \text{TableTD } 73/77 \\ p = 30 \text{ ans} \\ n = 30 \text{ ans} \\ C = 10\,000€ \end{cases}$

On obtient les résultats indiqués à la page suivante.

MOEGLIN INSTITUTE 34 Boulevard du Midi 06150 CANNES LA BOCCA
tél + 33 4 93 90 54 15 fax + 33 4 93 49 91 18 www.moeglin.com

table TD 73/77	capital décès	10 000 €	v=1/(1+i)
	taux technique i	4.50%	0.9569378

				TEMPORAIRE décès		capital DIFFERE		MIXTE	
âge x	**l(x)**	**décès dx**	**Prime naturelle de décès**	**Prime nivelée**	**Provision mathématique pure**	**Prime nivelée**	**Provision mathématique pure**	**Prime nivelée**	**Provision mathématique pure**
				109.80 €		**106.74 €**		**216.53 €**	
40	93 516	324	33.89 €	109.80 €	0.00 €	106.74 €	0.00 €	216.53 €	0.00 €
41	93 192	356	37.37 €	109.80 €	79.60 €	106.74 €	111.93 €	216.53 €	191.52 €
42	92 836	396	41.73 €	109.80 €	159.47 €	106.74 €	229.38 €	216.53 €	388.85 €
43	92 440	444	46.99 €	109.80 €	238.80 €	106.74 €	352.75 €	216.53 €	591.55 €
44	91 996	493	52.42 €	109.80 €	316.71 €	106.74 €	482.48 €	216.53 €	799.18 €
45	91 503	537	57.41 €	109.80 €	393.02 €	106.74 €	619.05 €	216.53 €	1 012.06 €
46	90 966	575	61.83 €	109.80 €	468.20 €	106.74 €	762.92 €	216.53 €	1 231.12 €
47	90 391	619	66.99 €	109.80 €	542.82 €	106.74 €	914.57 €	216.53 €	1 457.39 €
48	89 772	669	72.90 €	109.80 €	616.20 €	106.74 €	1 074.63 €	216.53 €	1 690.82 €
49	89 103	723	79.38 €	109.80 €	687.61 €	106.74 €	1 243.79 €	216.53 €	1 931.40 €
50	88 380	775	85.78 €	109.80 €	756.48 €	106.74 €	1 422.85 €	216.53 €	2 179.33 €
51	87 605	827	92.35 €	109.80 €	822.83 €	106.74 €	1 612.56 €	216.53 €	2 435.39 €
52	86 778	885	99.76 €	109.80 €	886.46 €	106.74 €	1 813.78 €	216.53 €	2 700.25 €
53	85 893	955	108.76 €	109.80 €	946.49 €	106.74 €	2 027.62 €	216.53 €	2 974.11 €
54	84 938	1 029	118.51 €	109.80 €	1 001.30 €	106.74 €	2 255.48 €	216.53 €	3 256.78 €
55	83 909	1 097	127.89 €	109.80 €	1 049.97 €	106.74 €	2 498.79 €	216.53 €	3 548.76 €
56	82 812	1 158	136.79 €	109.80 €	1 092.59 €	106.74 €	2 758.84 €	216.53 €	3 851.43 €
57	81 654	1 219	146.04 €	109.80 €	1 129.34 €	106.74 €	3 037.00 €	216.53 €	4 166.34 €
58	80 435	1 289	156.77 €	109.80 €	1 159.60 €	106.74 €	3 334.99 €	216.53 €	4 494.59 €
59	79 146	1 374	169.82 €	109.80 €	1 181.64 €	106.74 €	3 655.18 €	216.53 €	4 836.82 €
60	77 772	1 476	185.65 €	109.80 €	1 192.79 €	106.74 €	4 000.65 €	216.53 €	5 193.44 €
61	76 296	1 590	203.86 €	109.80 €	1 189.77 €	106.74 €	4 375.26 €	216.53 €	5 565.03 €
62	74 706	1 699	222.47 €	109.80 €	1 169.39 €	106.74 €	4 783.37 €	216.53 €	5 952.76 €
63	73 007	1 799	241.05 €	109.80 €	1 129.96 €	106.74 €	5 229.08 €	216.53 €	6 359.04 €
64	71 208	1 906	261.84 €	109.80 €	1 070.01 €	106.74 €	5 716.80 €	216.53 €	6 786.81 €
65	69 302	2 026	285.98 €	109.80 €	985.66 €	106.74 €	6 252.97 €	216.53 €	7 238.63 €
66	67 276	2 149	312.48 €	109.80 €	871.38 €	106.74 €	6 846.03 €	216.53 €	7 717.41 €
67	65 127	2 272	341.26 €	109.80 €	721.85 €	106.74 €	7 505.39 €	216.53 €	8 227.23 €
68	62 855	2 382	370.72 €	109.80 €	530.97 €	106.74 €	8 242.20 €	216.53 €	8 773.18 €
69	60 473	2 492	403.11 €	109.80 €	293.32 €	106.74 €	9 068.30 €	216.53 €	9 361.62 €
70	57 981	2 612			0.00 €		10 000.00 €	0.00 €	10 000.00 €


PROVISIONS mathématiques PURES d'une assurance MIXTE de 10 000 €
assuré de 40 ans, durée 30 ans, taux 4.50% TD73/77
montants des provisions pures
10 000 €
9 000 €
8 000 €
7 000 €
6 000 €
5 000 €
4 000 €
3 000 €
2 000 €
1 000 €
0 €
MIXTE
capital DIFFERE
TEMPORAIRE décès
1
6
11
16
21
26
31
âges

4 Application numérique avec les 3 méthodes

Les provisions obtenues sont identiques, par garantie

		prime annuelle temporaire		109,80	prime annuelle cap différé		106,74			216,53
		Provisions pures temporaire décès			Provisions pures capital différé			Provisions pures capital MIXTE		
nb d'années	âge	Méthode prospective	Méthode retrospective	Méthode récurrence	Méthode prospective	Méthode retrospective	Méthode récurrence	Méthode prospective	Méthode retrospective	Méthode récurrence
0	40	- €	- €	- €	- €	- €	- €	- €	- €	- €
1	41	79,60 €	79,60 €	79,60 €	111,93 €	111,93 €	111,93 €	191,52 €	191,52 €	191,52 €
2	42	159,47 €	159,47 €	159,47 €	229,38 €	229,38 €	229,38 €	388,85 €	388,85 €	388,85 €
3	43	238,80 €	238,80 €	238,80 €	352,75 €	352,75 €	352,75 €	591,55 €	591,55 €	591,55 €
4	44	316,71 €	316,71 €	316,71 €	482,48 €	482,48 €	482,48 €	799,18 €	799,18 €	799,18 €
5	45	393,02 €	393,02 €	393,02 €	619,05 €	619,05 €	619,05 €	1 012,06 €	1 012,06 €	1 012,06 €
6	46	468,20 €	468,20 €	468,20 €	762,92 €	762,92 €	762,92 €	1 231,12 €	1 231,12 €	1 231,12 €
7	47	542,82 €	542,82 €	542,82 €	914,57 €	914,57 €	914,57 €	1 457,39 €	1 457,39 €	1 457,39 €
8	48	616,20 €	616,20 €	616,20 €	1 074,63 €	1 074,63 €	1 074,63 €	1 690,82 €	1 690,82 €	1 690,82 €
9	49	687,61 €	687,61 €	687,61 €	1 243,79 €	1 243,79 €	1 243,79 €	1 931,40 €	1 931,40 €	1 931,40 €
10	50	756,48 €	756,48 €	756,48 €	1 422,85 €	1 422,85 €	1 422,85 €	2 179,33 €	2 179,33 €	2 179,33 €
11	51	822,83 €	822,83 €	822,83 €	1 612,56 €	1 612,56 €	1 612,56 €	2 435,39 €	2 435,39 €	2 435,39 €
12	52	886,46 €	886,46 €	886,46 €	1 813,78 €	1 813,78 €	1 813,78 €	2 700,25 €	2 700,25 €	2 700,25 €
13	53	946,49 €	946,49 €	946,49 €	2 027,62 €	2 027,62 €	2 027,62 €	2 974,11 €	2 974,11 €	2 974,11 €
14	54	1 001,30 €	1 001,30 €	1 001,30 €	2 255,48 €	2 255,48 €	2 255,48 €	3 256,78 €	3 256,78 €	3 256,78 €
15	55	1 049,97 €	1 049,97 €	1 049,97 €	2 498,79 €	2 498,79 €	2 498,79 €	3 548,76 €	3 548,76 €	3 548,76 €
16	56	1 092,59 €	1 092,59 €	1 092,59 €	2 758,84 €	2 758,84 €	2 758,84 €	3 851,43 €	3 851,43 €	3 851,43 €
17	57	1 129,34 €	1 129,34 €	1 129,34 €	3 037,00 €	3 037,00 €	3 037,00 €	4 166,34 €	4 166,34 €	4 166,34 €
18	58	1 159,60 €	1 159,60 €	1 159,60 €	3 334,99 €	3 334,99 €	3 334,99 €	4 494,59 €	4 494,59 €	4 494,59 €
19	59	1 181,64 €	1 181,64 €	1 181,64 €	3 655,18 €	3 655,18 €	3 655,18 €	4 836,82 €	4 836,82 €	4 836,82 €
20	60	1 192,79 €	1 192,79 €	1 192,79 €	4 000,65 €	4 000,65 €	4 000,65 €	5 193,44 €	5 193,44 €	5 193,44 €
21	61	1 189,77 €	1 189,77 €	1 189,77 €	4 375,26 €	4 375,26 €	4 375,26 €	5 565,03 €	5 565,03 €	5 565,03 €
22	62	1 169,39 €	1 169,39 €	1 169,39 €	4 783,37 €	4 783,37 €	4 783,37 €	5 952,76 €	5 952,76 €	5 952,76 €
23	63	1 129,96 €	1 129,96 €	1 129,96 €	5 229,08 €	5 229,08 €	5 229,08 €	6 359,04 €	6 359,04 €	6 359,04 €
24	64	1 070,01 €	1 070,01 €	1 070,01 €	5 716,80 €	5 716,80 €	5 716,80 €	6 786,81 €	6 786,81 €	6 786,81 €
25	65	985,66 €	985,66 €	985,66 €	6 252,97 €	6 252,97 €	6 252,97 €	7 238,63 €	7 238,63 €	7 238,63 €
26	66	871,38 €	871,38 €	871,38 €	6 846,03 €	6 846,03 €	6 846,03 €	7 717,41 €	7 717,41 €	7 717,41 €
27	67	721,85 €	721,85 €	721,85 €	7 505,39 €	7 505,39 €	7 505,39 €	8 227,23 €	8 227,23 €	8 227,23 €
28	68	530,97 €	530,97 €	530,97 €	8 242,20 €	8 242,20 €	8 242,20 €	8 773,18 €	8 773,18 €	8 773,18 €
29	69	293,32 €	293,32 €	293,32 €	9 068,30 €	9 068,30 €	9 068,30 €	9 361,62 €	9 361,62 €	9 361,62 €
30	70	- €	- €	- €	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €	10 000,00 €

IX Calcul des provisions à une date t quelconque

Le calcul d'une provision mathématique à une date t quelconque peut être réalisé suivant **3 méthodes** :

1- une interpolation linéaire sur les provisions mathématiques calculées aux dates anniversaires qui encadrent la date de calcul t

2- une interpolation linéaire sur les provisions mathématiques calculées aux dates anniversaires qui encadrent la date de calcul t, **en ajoutant une correction de prime**

3- Une reconstruction des effectifs de la table de mortalité suivant une périodicité mensuelle (interpolation des lx) et un calcul de la provision mathématiques avec cette nouvelle table c'est-à-dire avec des âges exprimés en années-mois.

1 Méthode 1 : Interpolation linéaire des provisions aux dates anniversaires

Dans la méthode 1, on interpole les provisions aux dates anniversaires du contrat encadrant la date t (la date d'anniversaire précédente est notée k et la suivante k+1)
On a donc la formule suivante :

$$\boxed{{}_tV_x = {}_kV_x + \Delta t \cdot \left({}_{k+1}V_x - {}_kV_x\right) \quad avec\ \Delta t = \frac{\text{nombre de mois entre la (date k) et la (date t)}}{12}} \quad (1)$$

Interpolation linéaire simplifiée pour les rentes

- Pour les rentes viagères, on calcule la provision d'inventaire V' à l'âge x+1/2, pour faire coïncider la date d'inventaire au 31.12, c'est-à-dire avec la date de clôture de l'exercice (x est l'âge de l'assuré calculé par différence de millésime).

  On utilise souvent : $V'_{x+1/2} = \frac{V'_x + V'_{x+1}}{2}$

2 Méthode 2 : Interpolation linéaire des provisions avec correction de prime

La méthode 1 induit inévitablement un écart que permet de contourner **la méthode 2**.
En effet, en considérant la formule de récurrence suivante:

$$ {}_kV_x + P = \left(q_{x+k} \quad s_{k+1} \quad v^{1/2}\right) \quad + \quad \left(p_{x+k} \quad r_{k+1} \quad v\right) \quad + \quad \left(p_{x+k} \quad {}_{k+1}V_x \quad v\right) $$

en multipliant par (1+i) on obtient

$$ \left({}_kV_x + P\right)(1+i) = \left(q_{x+k} \cdot s_{k+1} \cdot (1+i)^{1/2}\right) + (p_{x+k} \cdot r_{k+1}) + (p_{x+k} \cdot {}_{k+1}V_x) \quad (2) $$

Pour un intervalle de temps ε suffisamment petit pour négliger la probabilité de décès, le facteur d'actualisation, on obtient:

$$ \left({}_kV_x + P\right)(1+i_\varepsilon) = \left({}_\varepsilon q_{x+k} \cdot s_{k+1} \cdot (1+i_\varepsilon)^{1/2}\right) + ({}_\varepsilon p_{x+k} \cdot 0) + ({}_\varepsilon p_{x+k} \cdot {}_{k+\varepsilon}V_x) \quad (2) $$

i_ε taux équivalent pour une période de durée ε

$$ {}_{k+\varepsilon}V_x \approx {}_kV_x + P \qquad (3) $$

(L'intervalle ε est par exemple, la seconde qui suit le paiement de la prime).
L'interpolation (4) entre la date $k+\varepsilon$ et k+1 est alors plus proche de la réalité que la formule (1).

$$ {}_tV_x = {}_{k+\varepsilon}V_x + \Delta t \cdot \left({}_{k+1}V_x - {}_{k+\varepsilon}V_x\right) \quad (4) $$

Cette formule peut se simplifier sous la forme (5) :

$$ {}_tV_x = (1-\Delta t) \cdot \left({}_kV_x + P\right) + \Delta t \cdot {}_{k+1}V_x = {}_kV_x + \Delta t \cdot \left({}_{k+1}V_x - {}_kV_x\right) + (1-\Delta t) \cdot P $$

$$ {}_tV_x = \begin{cases} [\text{Provision méthode 1}] & \text{avec } t = k \\ [\text{Provision méthode 1}] + (1-\Delta t) \cdot P & \text{avec } k < t \le k+1 \end{cases} \qquad (5) $$

3 Méthode 3 : Interpolation linéaire des effectifs Lx de la table de mortalité

La méthode 3 interpole les Lx afin de les calculer **mensuellement** avec la formule suivante :

$$\boxed{L_{x+t} = L_{x+k} + \Delta t \cdot \left(L_{x+k+1} - L_{x+k}\right)}$$

Cette méthode permet de considérer également la date d'anniversaire de l'assuré (et non pas de considérer un âge millésime comme dans les interpolations précédente).

Exemple :

Table = T8890
Date de naissance de l'assuré : 10/03/1965
Date du flux élémentaire : 20/10/2007
Date d'estimation : 31/12/2006

Âge à la date de d'estimation : 41 ans 9 mois 26 jours = 41 ans 10 mois

$$\boxed{l_{41+\frac{10}{12}} = l_{41} + \frac{10}{12} \times (l_{42} - l_{41}) = 94476 = \frac{10}{12} \times (94182 - 94476) = 94231}$$

Âge à la date du flux : 42 ans 7 mois 14 jours = 42 ans 07 mois

$$\boxed{l_{42+\frac{7}{12}} = l_{42} - \frac{7}{12} \times (l_{42} - l_{43}) = 94182 - \frac{7}{12} \times (94182 - 93868) = 93320}$$

La probabilité de survie associée au flux à la date de calcul est donc :

$$\boxed{{}_{41\text{ ans }10\text{mois}}p_{42\text{ ans }7\text{mois}} = \frac{93320}{94231} = 0{,}9967}$$

Cette méthode est très rarement utilisée

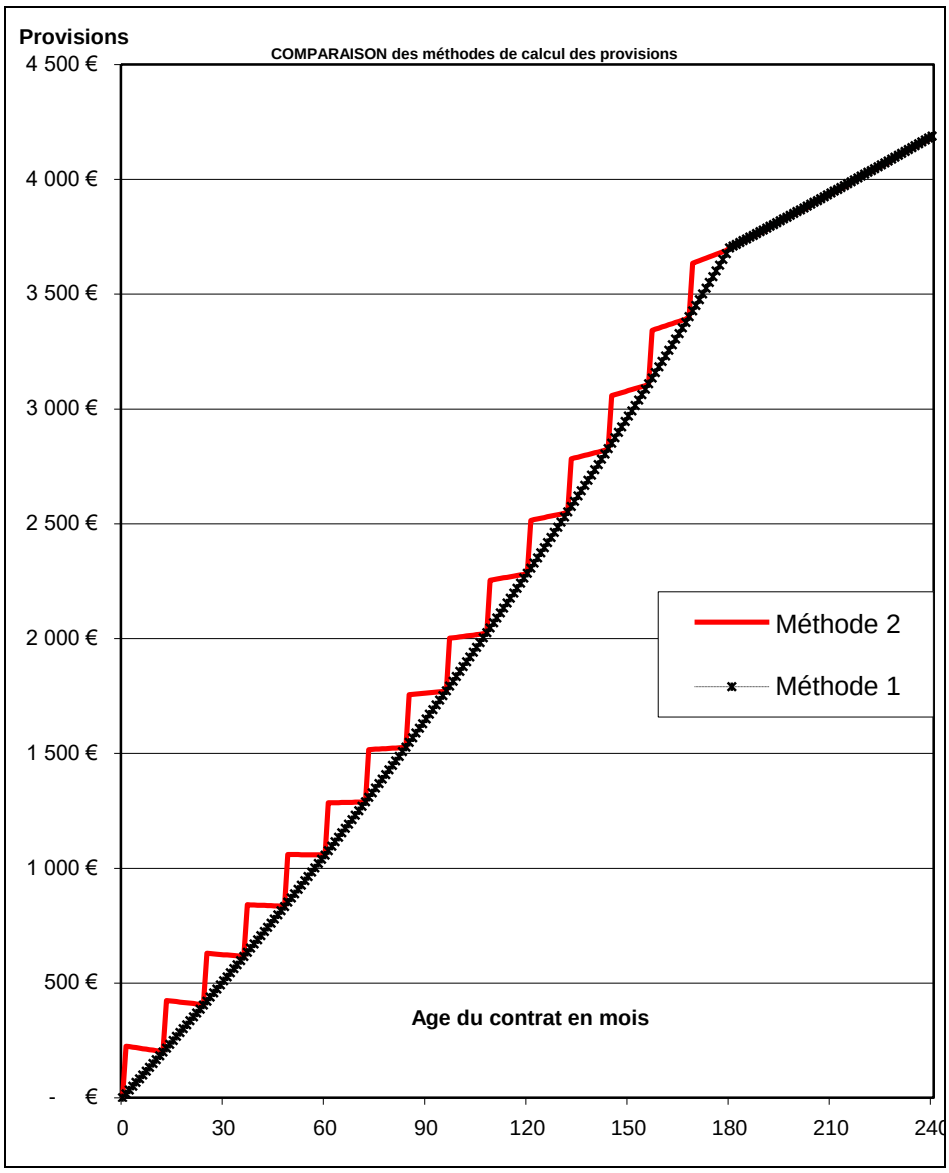
4 Exemple : Calcul de provisions d'un contrat Vie entière

Considérons un contrat Vie entière d'un capital de 10 000 euros.
Les primes annuelles de 207,79 € sont payées pendant 15 ans, pour un âge à la souscription de 24 ans
Le taux technique est de 3% et la table de mortalité est la table TD 88 90

Le tableau suivant présente les provisions calculées pour les 12 premiers mois.

durée en mois	**Provisions Méthode 1**	**Provisions Méthode 2**	**écart 2-1**	**écart 2-1 en %**
0	- €	- €	- €	0%
1	17 €	224 €	208 €	1257%
2	33 €	222 €	189 €	572%
3	50 €	220 €	170 €	343%
4	66 €	218 €	152 €	229%
5	83 €	216 €	133 €	161%
6	99 €	214 €	114 €	115%
7	116 €	211 €	96 €	83%
8	132 €	209 €	77 €	58%
9	149 €	207 €	58 €	39%
10	165 €	205 €	40 €	24%
11	182 €	203 €	21 €	11%
12	198 €	198 €	- €	0%
13	216 €	423 €	208 €	96%
14	233 €	422 €	189 €	81%
15	250 €	420 €	170 €	68%
16	267 €	418 €	152 €	57%
17	284 €	417 €	133 €	47%
18	301 €	415 €	114 €	38%
19	318 €	413 €	95 €	30%
20	335 €	412 €	77 €	23%
21	352 €	410 €	58 €	16%
22	369 €	408 €	39 €	11%
Etc …				

Le graphique suivant présente les provisions calculées par les méthodes 1 et 2.
Nous observons très clairement que les provisions calculées par une simple interpolation entre les dates d'anniversaire du contrat induit un sous provisionnement aux dates intermédiaires.



Remarque :

1) L'interpolation linéaire est donc pénalisante pendant la période de paiement des primes
- Il n'y a plus d'écart de provisions à la fin de paiement des primes.
- L'écart observé est atténué en fonction du fractionnement de la prime.

2) Pour un contrat de rente viagère en service, l'interpolation linéaire qui est décroissante, est positionnée **au dessus** de la courbe en escalier également décroissante.
Dans ce cas, l'assureur retient l'interpolation linéaire qui est plus prudente.

Chapitre VIII

Les primes d'inventaire et commerciales

Les provisions mathématiques corrigées

X Table et taux en vigueur

a Tables en vigueur

Tables TGF05 et TGH05

L'arrêté du 1er août 2006 publié au JO du 26 août 2006 homologue l'utilisation des nouvelles tables de génération féminines et masculines : TGF05 et TGH05.
Ces tables sont utilisables par sexe pour les rentes viagères à compter du 1er janvier 2007.
Elles ont été intégrées dans la liste des tables de la bibliothèque sous les noms TGF05 et TGH05.

L'article A.441-4-1 précise :
« Les entreprises peuvent répartir sur une période de quinze ans au plus les effets sur le niveau de la provision mathématique théorique résultant de l'utilisation des tables mentionnées au premier alinéa. »

« La provision mathématique théorique devra néanmoins être, d'ici au 1er août 2008, supérieure ou égale à celle obtenue avec la table de génération homologuée par arrêté du 28 juillet 1993, lorsque cette provision est inférieure à celle résultant de l'utilisation des tables mentionnées au premier alinéa. »

Tables TH00-02 et TF00-02

Par arrêté du 20 décembre 2005, ces tables ont été homologuées respectivement pour la tarification et le provisionnement des opérations en cas de DECES et en cas de VIE (capitaux différés).
Ces tables reposent sur les observations INSEE de 2000 à 2002, de la population masculine pour la table TH00-02 et féminine TV00-02.
Des décalages d'âges s'utilisent pour les capitaux différés uniquement. Ils s'appliquent aux taux de mortalité issus des tables et conduisent donc à reconstituer deux nouvelles lois de survie. Ces lois reconstituées sont présentes dans la liste des tables sous le nom de TH0002_Decal et TF0002_Decal.

Décalage d'âge – TF 00-02

Age	Décalage
[16;32]	-11
[33;34]	-8
[35;50]	-6
[51;60]	-5
[61;67]	-4
[68;77]	-3
[78;90]	-2
[91;93]	-1
94 et plus	0

Décalage d'âge – TH 00-02

Age	Décalage
[16;38]	-13
[39;62]	-7
[63;64]	-6
[65;74]	-4
75 et plus	-3

b Taux techniques en vigueur (article A132-1 du code des assurances)

Les tarifs pratiqués par les entreprises pratiquant des opérations mentionnées au 1º de l'article L. 310-1, en ce compris celles mentionnées à l'article L. 143-1 doivent être établis d'après un taux au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus. Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus.

En ce qui concerne les contrats libellés en devises étrangères, le taux d'intérêt technique ne sera pas supérieur à 75 % du taux moyen des emprunts d'Etat à long terme du pays de la devise concernée calculé sur base semestrielle ou, à défaut, de la référence du taux à long terme pertinente pour la devise concernée et équivalente à la référence retenue pour l'euro.

Pour les contrats au-delà de huit ans, le taux du tarif ne pourra en outre être supérieur au plafond établi par les réglementations en vigueur dans le pays de chaque devise concernée, pour les garanties de même durée, sans pouvoir excéder 60 % du taux moyen visé à l'alinéa précédent. Il en est de même pour les contrats à primes périodiques.

Le taux moyen des emprunts d'Etat à retenir est le plus élevé des deux taux suivants : taux à l'émission et taux de rendement sur le marché secondaire.

Les règles définies au présent article sont à appliquer en fonction des taux en vigueur au moment de la souscription et ne sont pas applicables aux opérations de prévoyance collective visées au chapitre Ier du titre IV du livre IV du code des assurances. Dans le cas de versements non programmés aux termes du contrat, ces règles sont à apprécier au moment de chaque versement.

c Historiques des derniers taux

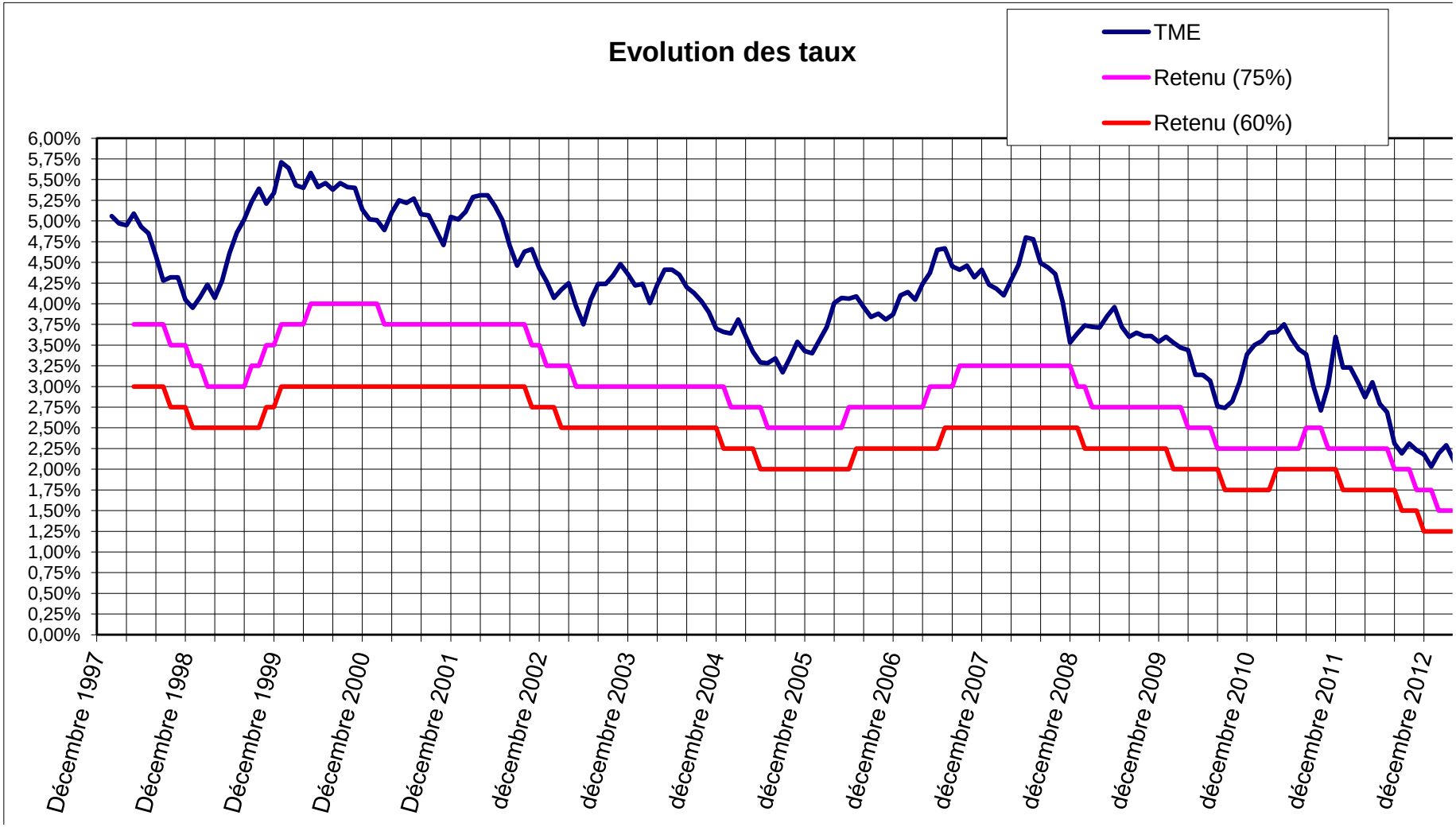
	Mois	TME	Moyenne TME	75 % Moy	Retenu (75%)	60 % Moy	Retenu (60%)
1997	Décembre						
	Janvier						
1998	Février	5.06%					
	Mars	4.97%					
	Avril	4.95%					
	Mai	5.09%	5.19%	3.89%	3.75%	3.11%	3.00%
	Juin	4.93%	5.10%	3.83%	3.75%	3.06%	3.00%
	Juillet	4.85%	5.04%	3.78%	3.75%	3.02%	3.00%
	Août	4.58%	4.98%	3.73%	3.75%	2.99%	3.00%
	Septembre	4.28%	4.90%	3.68%	3.75%	2.94%	3.00%
	Octobre	4.32%	4.78%	3.59%	3.50%	2.87%	2.75%
	Novembre	4.32%	4.68%	3.51%	3.50%	2.81%	2.75%
	Décembre	4.05%	4.55%	3.41%	3.50%	2.73%	2.75%
1999	Janvier	3.95%	4.40%	3.30%	3.25%	2.64%	2.50%
	Février	4.08%	4.25%	3.19%	3.25%	2.55%	2.50%
	Mars	4.23%	4.17%	3.13%	3.00%	2.50%	2.50%
	Avril	4.07%	4.16%	3.12%	3.00%	2.50%	2.50%
	Mai	4.28%	4.12%	3.09%	3.00%	2.47%	2.50%
	Juin	4.61%	4.11%	3.08%	3.00%	2.47%	2.50%
	Juillet	4.86%	4.20%	3.15%	3.00%	2.52%	2.50%
	Août	5.02%	4.36%	3.27%	3.00%	2.61%	2.50%
	Septembre	5.23%	4.51%	3.38%	3.25%	2.71%	2.50%
	Octobre	5.39%	4.68%	3.51%	3.25%	2.81%	2.50%
	Novembre	5.21%	4.90%	3.67%	3.50%	2.94%	2.75%
	Décembre	5.34%	5.05%	3.79%	3.50%	3.03%	2.75%
2000	Janvier	5.71%	5.18%	3.88%	3.75%	3.11%	3.00%
	Février	5.64%	5.32%	3.99%	3.75%	3.19%	3.00%
	Mars	5.43%	5.42%	4.07%	3.75%	3.25%	3.00%
	Avril	5.40%	5.45%	4.09%	3.75%	3.27%	3.00%
	Mai	5.58%	5.46%	4.10%	4.00%	3.28%	3.00%
	Juin	5.41%	5.52%	4.14%	4.00%	3.31%	3.00%
	Juillet	5.46%	5.53%	4.15%	4.00%	3.32%	3.00%
	Août	5.38%			4.00%		3.00%
	Septembre	5.46%	5.44%	4.08%	4.00%	3.26%	3.00%
	Octobre	5.41%	5.45%	4.09%	4.00%	3.27%	3.00%
	Novembre	5.40%	5.45%	4.09%	4.00%	3.27%	3.00%
	Décembre	5.14%	5.38%	4.04%	4.00%	3.23%	3.00%
2001	Janvier	5.02%	5.31%	3.98%	4.00%	3.19%	3.00%
	Février	5.01%	5.24%	3.93%	4.00%	3.14%	3.00%
	Mars	4.89%	5.15%	3.86%	3.75%	3.09%	3.00%
	Avril	5.10%	5.09%	3.82%	3.75%	3.06%	3.00%
	Mai	5.25%	5.07%	3.80%	3.75%	3.04%	3.00%
	Juin	5.22%	5.08%	3.81%	3.75%	3.05%	3.00%
	Juillet	5.27%	5.12%	3.84%	3.75%	3.07%	3.00%
	Août	5.08%	5.14%	3.85%	3.75%	3.08%	3.00%
	Septembre	5.07%	5.17%	3.87%	3.75%	3.10%	3.00%
	Octobre	4.89%	5.13%	3.85%	3.75%	3.08%	3.00%
	Novembre	4.71%	5.04%	3.78%	3.75%	3.02%	3.00%

	Décembre	5.05%	5.01%	3.76%	3.75%	3.01%	3.00%
2002	Janvier	5.02%	4.97%	3.73%	3.75%	2.98%	3.00%
	février	5.11%	4.98%	3.73%	3.75%	2.99%	3.00%
	mars	5.29%	5.01%	3.76%	3.75%	3.01%	3.00%
	avril	5.31%	5.08%	3.81%	3.75%	3.05%	3.00%
	mai	5.31%	5.18%	3.89%	3.75%	3.11%	3.00%
	juin	5.18%	5.20%	3.90%	3.75%	3.11%	3.00%
	Juillet	5.01%	5.20%	3.90%	3.75%	3.12%	3.00%
	août	4.70%	5.13%	3.85%	3.75%	3.08%	3.00%
	septembre	4.46%	5.00%	3.75%	3.75%	3.00%	3.00%
	octobre	4.63%	4.88%	3.66%	3.75%	2.93%	3.00%
	novembre	4.66%	4.77%	3.58%	3.50%	2.86%	2.75%
	décembre	4.43%	4.65%	3.49%	3.50%	2.79%	2.75%
2003	janvier	4.27%	4.53%	3.39%	3.25%	2.72%	2.75%
	février	4.07%	4.42%	3.32%	3.25%	2.65%	2.75%
	mars	4.17%	4.37%	3.28%	3.25%	2.62%	2.50%
	avril	4.25%	4.31%	3.23%	3.25%	2.59%	2.50%
	mai	3.97%	4.19%	3.15%	3.00%	2.52%	2.50%
	juin	3.75%	4.08%	3.06%	3.00%	2.45%	2.50%
	juillet	4.05%	4.04%	3.03%	3.00%	2.43%	2.50%
	août	4.24%	4.07%	3.05%	3.00%	2.44%	2.50%
	septembre	4.24%	4.08%	3.06%	3.00%	2.45%	2.50%
	octobre	4.34%	4.10%	3.07%	3.00%	2.46%	2.50%
	novembre	4.48%	4.18%	3.14%	3.00%	2.51%	2.50%
	décembre	4.36%	4.29%	3.21%	3.00%	2.57%	2.50%
2004	janvier	4.22%	4.31%	3.24%	3.00%	2.59%	2.50%
	février	4.24%	4.31%	3.24%	3.00%	2.59%	2.50%
	mars	4.01%	4.28%	3.21%	3.00%	2.57%	2.50%
	avril	4.23%	4.26%	3.19%	3.00%	2.55%	2.50%
	mai	4.41%	4.25%	3.18%	3.00%	2.55%	2.50%
	juin	4.41%	4.25%	3.19%	3.00%	2.55%	2.50%
	juillet	4.35%	4.28%	3.21%	3.00%	2.57%	2.50%
	août	4.20%	4.27%	3.20%	3.00%	2.56%	2.50%
	septembre	4.13%	4.29%	3.22%	3.00%	2.57%	2.50%
	octobre	4.03%	4.26%	3.19%	3.00%	2.55%	2.50%
	novembre	3.90%	4.17%	3.13%	3.00%	2.50%	2.50%
	décembre	3.70%	4.05%	3.04%	3.00%	2.43%	2.50%
2005	janvier	3.66%	3.94%	2.95%	3.00%	2.36%	2.25%
	février	3.64%	3.84%	2.88%	2.75%	2.31%	2.25%
	mars	3.81%	3.79%	2.84%	2.75%	2.27%	2.25%
	avril	3.61%	3.72%	2.79%	2.75%	2.23%	2.25%
	mai	3.42%	3.64%	2.73%	2.75%	2.18%	2.25%
	juin	3.29%	3.57%	2.68%	2.75%	2.14%	2.00%
	juillet	3.28%	3.51%	2.63%	2.50%	2.11%	2.00%
	août	3.34%	3.46%	2.59%	2.50%	2.08%	2.00%
	septembre	3.17%	3.35%	2.51%	2.50%	2.01%	2.00%
	octobre	3.35%	3.31%	2.48%	2.50%	1.99%	2.00%
	novembre	3.54%	3.33%	2.50%	2.50%	2.00%	2.00%
	décembre	3.43%	3.35%	2.51%	2.50%	2.01%	2.00%
2006	janvier	3.40%	3.37%	2.53%	2.50%	2.02%	2.00%
	février	3.56%	3.41%	2.56%	2.50%	2.05%	2.00%
	mars	3.72%	3.50%	2.63%	2.50%	2.10%	2.00%

	avril	4.01%	3.61%	2.71%	2.50%	2.17%	2.00%
	mai	4.07%	3.70%	2.77%	2.50%	2.22%	2.00%
	juin	4.06%	3.80%	2.85%	2.75%	2.28%	2.00%
	juillet	4.09%	3.92%	2.94%	2.75%	2.35%	2.25%
	août	3.96%	3.99%	2.99%	2.75%	2.39%	2.25%
	septembre	3.84%	4.01%	3.00%	2.75%	2.40%	2.25%
	octobre	3.88%	3.98%	2.99%	2.75%	2.39%	2.25%
	novembre	3.81%	3.94%	2.96%	2.75%	2.36%	2.25%
	décembre	3.87%	3.91%	2.93%	2.75%	2.35%	2.25%
2007	janvier	4.10%	3.91%	2.93%	2.75%	2.35%	2.25%
	février	4.14%	3.94%	2.96%	2.75%	2.36%	2.25%
	mars	4.05%	3.98%	2.98%	2.75%	2.39%	2.25%
	avril	4.24%	4.04%	3.03%	2.75%	2.42%	2.25%
	mai	4.37%	4.13%	3.10%	3.00%	2.48%	2.25%
	juin	4.65%	4.26%	3.19%	3.00%	2.56%	2.25%
	juillet	4.67%	4.35%	3.27%	3.00%	2.61%	2.50%
	août	4.45%	4.41%	3.30%	3.00%	2.64%	2.50%
	septembre	4.41%	4.47%	3.35%	3.25%	2.68%	2.50%
	octobre	4.46%	4.50%	3.38%	3.25%	2.70%	2.50%
	novembre	4.32%	4.49%	3.37%	3.25%	2.69%	2.50%
	décembre	4.41%	4.45%	3.34%	3.25%	2.67%	2.50%
2008	janvier	4.23%	4.38%	3.29%	3.25%	2.63%	2.50%
	février	4.18%	4.34%	3.26%	3.25%	2.60%	2.50%
	mars	4.10%	4.28%	3.21%	3.25%	2.57%	2.50%
	avril	4.29%	4.26%	3.20%	3.25%	2.56%	2.50%
	mai	4.47%	4.28%	3.21%	3.25%	2.57%	2.50%
	juin	4.80%	4.35%	3.26%	3.25%	2.61%	2.50%
	juillet	4.78%	4.44%	3.33%	3.25%	2.66%	2.50%
	août	4.49%	4.49%	3.37%	3.25%	2.69%	2.50%
	septembre	4.44%	4.55%	3.41%	3.25%	2.73%	2.50%
	octobre	4.36%	4.56%	3.42%	3.25%	2.73%	2.50%
	novembre	4.02%	4.48%	3.36%	3.25%	2.69%	2.50%
	décembre	3.53%	4.27%	3.20%	3.25%	2.56%	2.50%
2009	janvier	3.64%	4.08%	3.06%	3.00%	2.45%	2.50%
	février	3.74%	3.96%	2.97%	3.00%	2.37%	2.25%
	mars	3.72%	3.84%	2.88%	2.75%	2.30%	2.25%
	avril	3.71%	3.73%	2.80%	2.75%	2.24%	2.25%
	mai	3.85%	3.70%	2.78%	2.75%	2.22%	2.25%
	juin	3.96%	3.77%	2.83%	2.75%	2.26%	2.25%
	juillet	3.72%	3.78%	2.84%	2.75%	2.27%	2.25%
	août	3.60%	3.76%	2.82%	2.75%	2.26%	2.25%
	septembre	3.65%	3.75%	2.81%	2.75%	2.25%	2.25%
	octobre	3.61%	3.73%	2.80%	2.75%	2.24%	2.25%
	novembre	3.61%	3.69%	2.77%	2.75%	2.22%	2.25%
	décembre	3.54%	3.62%	2.72%	2.75%	2.17%	2.25%
2010	janvier	3.60%	3.60%	2.70%	2.75%	2.16%	2.25%
	février	3.53%	3.59%	2.69%	2.75%	2.15%	2.00%
	mars	3.47%	3.56%	2.67%	2.75%	2.14%	2.00%
	avril	3.44%	3.53%	2.65%	2.50%	2.12%	2.00%
	mai	3.14%	3.45%	2.59%	2.50%	2.07%	2.00%
	juin	3.14%	3.39%	2.54%	2.50%	2.03%	2.00%
	juillet	3.07%	3.30%	2.47%	2.50%	1.98%	2.00%

	août	2.76%	3.17%	2.38%	2.25%	1.90%	2.00%
	septembre	2.74%	3.05%	2.29%	2.25%	1.83%	1.75%
	octobre	2.82%	2.95%	2.21%	2.25%	1.77%	1.75%
	novembre	3.05%	2.93%	2.20%	2.25%	1.76%	1.75%
	décembre	3.39%	2.97%	2.23%	2.25%	1.78%	1.75%
2011	janvier	3.50%	3.04%	2.28%	2.25%	1.83%	1.75%
	février	3.55%	3.18%	2.38%	2.25%	1.91%	1.75%
	mars	3.65%	3.33%	2.50%	2.25%	2.00%	1.75%
	avril	3.66%	3.47%	2.60%	2.25%	2.08%	2.00%
	mai	3.75%	3.58%	2.69%	2.25%	2.15%	2.00%
	juin	3.58%	3.62%	2.71%	2.25%	2.17%	2.00%
	juillet	3.45%	3.61%	2.71%	2.25%	2.16%	2.00%
	août	3.39%	3.58%	2.69%	2.50%	2.15%	2.00%
	septembre	3.00%	3.47%	2.60%	2.50%	2.08%	2.00%
	octobre	2.71%	3.31%	2.49%	2.50%	1.99%	2.00%
	novembre	3.02%	3.19%	2.39%	2.25%	1.92%	2.00%
	décembre	3.60%	3.20%	2.40%	2.25%	1.92%	2.00%
2012	janvier	3,23%	3,16%	2,37%	2,25%	1,90%	1,75%
	février	3,23%	3,13%	2,35%	2,25%	1,88%	1,75%
	mars	3,06%	3,14%	2,36%	2,25%	1,89%	1,75%
	avril	2,87%	3,17%	2,38%	2,25%	1,90%	1,75%
	mai	3,05%	3,17%	2,38%	2,25%	1,90%	1,75%
	juin	2,79%	3,04%	2,28%	2,25%	1,82%	1,75%
	juillet	2,69%	2,95%	2,21%	2,25%	1,77%	1,75%
	août	2,31%	2,80%	2,10%	2,00%	1,68%	1,75%
	septembre	2,19%	2,65%	1,99%	2,00%	1,59%	1,50%
	octobre	2,31%	2,56%	1,92%	2,00%	1,53%	1,50%
	novembre	2,23%	2,42%	1,82%	1,75%	1,45%	1,50%
	décembre	2,18%	2,32%	1,74%	1,75%	1,39%	1,25%
2013	janvier	2,03%	2,21%	1,66%	1,75%	1,33%	1,25%
	février	2,19%	2,19%	1,64%	1,50%	1,31%	1,25%
	mars	2,29%	2,21%	1,65%	1,50%	1,32%	1,25%
	avril	2,11%	2,17%	1,63%	1,50%	1,30%	1,25%
	mai	1,90%	2,12%	1,59%	1,50%	1,27%	1,25%
	juin	1,86%	2,06%	1,55%	1,50%	1,24%	1,25%
	juillet	2,26%	2,10%	1,58%	1,50%	1,26%	1,25%
	août	2,31%	2,12%	1,59%	1,50%	1,27%	1,25%
	septembre	**2,43%**	**2,15%**	**1,61%**	**1,50%**	**1,29%**	**1,25%**
	octobre						
	novembre						
	décembre						

d Graphe des derniers taux



XI Les primes d'inventaire et commerciales

Tous les éléments additionnels à la prime pure, sont appelés les chargements.

L'assureur exige de l'assuré, une prime commerciale ou brute qui est la somme de ces deux éléments.

1 Les chargements utilisés

On peut trouver les chargements suivants:

- un chargement d'acquisition **F**, montant fixe, destiné à compenser les frais initiaux du contrat (visite médicale, commissions de l'agent ou du courtier,…).
- un chargement de gestion **g** pendant la durée n du contrat, **g'** pendant la durée p de paiement des primes pour couvrir les charges de gestion de l'entreprise (charges du personnel, charges de gestion courante, impôts et taxes…).
- un chargement d'encaissement des primes θ.
- un chargement de paiement des rentes α.
- un chargement de règlement d'un capital β déduit des capitaux décès.
- un chargement sur l'épargne gérée pour les contrats d'épargne PER, PEP…

2 Calcul de la prime brute ou commerciale

La prime brute ou commerciale est calculée par la relation d'équivalence suivante:

pour la prime annuelle brute P" (P prime annuelle pure):

$$P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + g'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + \theta\ P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + F$$

pour la prime unique brute Π'' (Π prime unique pure)

$$\Pi'' = \Pi + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + 0 + \theta\ \Pi'' + F$$

3 Les valeurs des chargements

Les chargements dans les tarifs

L'ancien texte article A335-1 indiquait que "les tarifs doivent comporter des chargements permettant la récupération par l'entreprise d'un montant de frais justifiables et raisonnables".

Le nouveau texte indique simplement que "les tarifs pratiqués comprennent la rémunération de l'entreprise…"

On peut donc supposer, comme avant, que les tarifs comportent des chargements justifiables et raisonnables, ou bien qu'ils prévoient un prélèvement suffisant sur les produits financiers.

Les chargements dans les provisions

Une "provision globale de gestion" est dotée, à due concurrence de l'ensemble des charges de gestion future des contrats, non couvertes par des chargements prévus aux contrats, sur les primes ou par des prélèvements sur les produits financiers.

4 La prime d'inventaire

La prime d'inventaire est la prime technique qui intervient dans le calcul des provisions mathématiques d'inventaires.

Elle résulte de l'incorporation d'une partie seulement des chargements.

5 Exemples de primes d'inventaires et brutes

a Capital différé

► **Prime unique**

Prime unique pure: $\Pi = {}_nE_x$

Prime unique d'inventaire: $\Pi' = {}_nE_x + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Prime unique brute: $\Pi'' = {}_nE_x + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \theta\ \Pi'' = \dfrac{\Pi'}{1-\theta}$

► **Prime annuelle**

Prime annuelle pure: $P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = {}_nE_x$

$P'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = {}_nE_x + g'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Prime annuelle d'inventaire: $P' = P + g' + g\ \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}$

Prime annuelle brute: $P'' = \dfrac{P'}{1-\theta}$

b Rente viagère immédiate fractionnée

Prime unique pure: $\Pi = a_x^{(m)} \cong a_x + \dfrac{m-1}{2m}$

Prime unique d'inventaire: $\Pi' = (1+\alpha)\left(a_x + \dfrac{m-1}{2m}\right)$

Prime unique brute: $\Pi'' = \dfrac{\Pi'}{1-\theta}$

c Rente viagère différée fractionnée

► **Prime unique**

Prime unique pure: $\Pi = {}_nE_x\ a_{x+n}^{(m)} \cong {}_nE_x\left(a_{x+n} + \dfrac{m-1}{2m}\right)$

Prime unique d'inventaire: $\Pi' = \left({}_nE_x + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right) \times \underbrace{\left((1+\alpha)\left(a_{x+n} + \dfrac{m-1}{2m}\right)\right)}_{\text{Capital représentatif de la rente}}$

Prime unique brute: $\Pi'' = \dfrac{\Pi'}{1-\theta}$

d Temporaire décès

► Prime unique

Prime unique pure:	$\Pi = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}\ C$ où C =capital
Prime unique d'inventaire:	$\Pi' = \left(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}\right) C$
Prime unique brute:	$\Pi'' = \dfrac{\Pi'}{1-\theta}$

► Prime annuelle

Prime annuelle pure:	$P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}\ C$ où C = capital
Prime annuelle d'inventaire:	$P'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} = \left(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil} + g'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}\rceil} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}\right) C$
Prime annuelle brute:	$P'' = \dfrac{P'}{1-\theta}$

XIILes provisions mathématiques corrigées

1 Principe général du calcul

Les calculs des provisions mathématiques des opérations d'assurance sur la vie, d'assurance nuptialité et de capitalisation, sont définis par les articles A331-1 et suivants du code des Assurances.

Reprenons la formule générale de calcul de la prime annuelle commerciale, c'est-à-dire:

$$P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + g'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + \theta\ P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + F$$

ou encore,

$$\boxed{P'' = P + g\ \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}} + g' + \theta\ P'' + \frac{F}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}}$$

Le tableau suivant regroupe les engagements futurs de l'assureur et de l'assuré, ainsi que le montant des provisions mathématiques, à l'âge x+t:

Nature de l'engagement	Valeur actuelle probable à l'âge x+t des engagements futurs		Provisions mathématiques (I)-(II)
	Assureur (I)	Assuré (II)	
Contrat pur (hors chargement)	$\partial_{x+t:\overline{n-t}\|}$	$P\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	${}_tV_x = \partial_{x+t:\overline{n-t}\|} - P\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$
Gestion sur la durée n du contrat (1)	$g\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$	$g\ \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}\|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	si t < p, ${}_tG1_x = g\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p}\|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}\right)$ si t ≥ p, ${}_tG1_x = g\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$ si p = n ${}_tG1_x = 0$
Gestion sur la durée p des primes (2)	$g'\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	$g'\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	${}_tG2_x = 0$
Encaissement	$\theta\ P''\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	$\theta\ P''\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	0
Acquisition (Zillmer)	0 pour t>0	$\frac{F}{\ddot{a}_{x:\overline{p}\|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$	${}_tZ_x = -\frac{F}{\ddot{a}_{x:\overline{p}\|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}\|}$

Provision mathématique d'inventaire :	${}_tV'_x = {}_tV_x + {}_tG_x$ avec ${}_tG_x = {}_tG1_x + {}_tG2_x$
Provision mathématique zillmérisée :	${}_tV''_x = {}_tV'_x + {}_tZ_x$

La provision mathématique ${}_tZ_x$ est appelée provision ou réserve de Zillmer. Cette provision est négative.

La Zillmérisation est la méthode qui consiste à tenir compte de la valeur actuelle des chargements d'acquisition, tant que la provision mathématique qui en résulte est positive ou nulle. (Une provision positive correspond à la dette nette de l'assureur envers l'assuré).

2 Contre-assurance des primes versées

- Pour les contrats avec contre-assurance, c'est-à-dire remboursement au décès des primes versées, on a la relation :

$$P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} = P\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + g\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + g'\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + \theta\ P''\ \ddot{a}_{x:\overline{p}|} + F + [\text{contre}-\text{assurance}]$$

où : $$\boxed{\text{contre}-\text{assurance} = P''\left((I\overline{A})^{1}_{x:\overline{p}|} + \underbrace{p \times {}_{p|}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n-p}|}}_{\substack{\text{Puis } p \times P'' \\ \text{à partir de } x+p}} \right)}$$

Chapitre IX

Transformation des contrats

XIII Introduction

Les transformations possibles de contrats sont nombreuses, par exemple:

- changement du mode de fractionnement de la prime,
- diminution du montant de la prime,
- changement de la durée du contrat,
- transformation d'un contrat vie entière en mixte,
- réduction,
- rachat.

Le principe général de la transformation consiste à égaliser, au moment de la transformation, les valeurs actuelles des engagements futurs assureur et assuré.

Provisions AVANT transformation = Provisions APRES transformation

La transformation doit être équitable de manière à ménager les intérêts des 2 parties.

XIV Changement de la durée de paiement des cotisations et de leur fractionnement

Dans cette transformation, les engagements de l'assureur restent identiques.

Soit la prime annuelle initiale P" versée pendant une durée n.

On recherche la nouvelle prime $P''^{[m]}$ qui sera versée pendant une durée de p années.

Soit x+t, l'âge de l'assuré au moment de la transformation à la date t.

L'égalité suivante permet de déterminer $P''^{[m]}$:

$$P''\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = P''^{[m]}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+t:\overline{p-t}|} = P''^{[m]}\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{p-t}E_{x+t}\right)\right]$$

$$\boxed{P''^{[m]} = P''\ \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{p-t}E_{x+t}\right)\right]}}$$

La prime versée à chaque échéance par le souscripteur est égale à : $\boxed{\frac{P''^{[m]}}{m}}$.

XV Prorogation d'échéance pour financer une aggravation du risque.

Un assuré dont le risque s'est aggravé, souhaite différer l'échéance de son contrat (une assurance mixte) de m années, tout en conservant le même capital assuré C ainsi que la même durée p des primes.

La surprime S qui finance l'aggravation du risque sera déduite de la provision mathématique d'inventaire. Pour simplifier, on considère que les chargements sont nuls, la provision pure est donc égale à la provision d'inventaire.

Soit t la date de la transformation, la provision mathématique pure à l'âge x+t est égale à :

$$ {}_{n-t}V_{x+t} = C \left[\overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + {}_{n-t}E_{x+t} \right] - P \; \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} $$

L'égalité suivante permet de déterminer le durée m supplémentaire : ${}_{n+m-t}V_{x+t} = {}_{n-t}V_{x+t} - S$

S est exprimé par exemple en % de la différence $\left(C - {}_{n-t}V_{x+t}\right)$ soit $S = s\% \left(C - {}_{n-t}V_{x+t}\right)$

Condition supplémentaire : ${}_{n-t}V_{x+t} - S \geq 0$

XVI Transformation quelconque

Un assuré souhaite remplacer sa police en cours par une nouvelle police. Il s'agit de déterminer la nouvelle prime.

Une partie des primes déjà versées a permis de couvrir le risque pendant la période écoulée, l'autre partie a servi à constituer la réserve d'inventaire inscrite au crédit du compte de l'assuré.

Au moment de la transformation, l'ancien contrat est annulé et la réserve d'inventaire est considérée comme une prime unique d'inventaire versée à l'assureur pour couvrir une partie du nouveau risque, représentée par exemple par un capital assuré C'.

Cette réserve déjà inscrite dans les comptes de l'assureur, n'est donc pas soumise aux frais d'acquisition ou d'encaissement prévus pour le contrat.

Toutefois, les anciens frais d'acquisition non amortis devront être déduits de cette provision.

L'assuré aura donc à verser une prime annuelle qui correspond à la garantie d'un capital égal à C-C', où C est le capital assuré prévu dans le nouveau contrat.

XVII Réduction, rachat

On dit qu'il y a **réduction** lorsqu'un assuré qui cesse de verser ses primes, ne demande pas le remboursement de la réserve du contrat.

Le capital assuré initial est alors simplement réduit.

La réserve d'inventaire est considérée comme une prime unique d'inventaire pour un contrat de même nature que le contrat initial, mais pour un capital assuré moindre.

Exemple: soit un contrat d'assurance mixte généralisé, avec un capital assuré C.

On considère pour simplifier que les chargements sont nuls.

La prime annuelle versée pendant une durée p à l'âge x est égale à : $P_{x:\overline{p}|} = C \dfrac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}}$

La provision à la date t est égale à : $V_{x+t} = C\ \overline{A}_{x+t} - P_{x:\overline{p}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|}$

Elle permet de couvrir un nouveau capital réduit C_r calculé avec la relation :

$$V_{x+t} = C\ \overline{A}_{x+t} - P_{x:\overline{p}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} = C_r\ \overline{A}_{x+t} - 0$$

D'où: $C_r = C \left(1 - \dfrac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p}|}} \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|}}{\overline{A}_{x+t}}\right) = C \left(1 - \dfrac{P_{x:\overline{p}|}}{P_{x+t:\overline{p-t}|}}\right)$

Il y a **rachat** lorsque l'assuré résilie son contrat et demande le remboursement immédiat de la valeur de rachat qui est égale à la provision d'inventaire diminuée d'une indemnité de résiliation pour l'assureur.