MOEGLIN INSTITUTE

Actuariat – Finance – Informatique – Formation

Module 2 - Exercices

Mathématiques des Assurances de personnes

Primes et Provisions

Publication: décembre 2017

Alain Moeglin, actuaire, membre certifié de l'Institut des Actuaires IA

Synthèse

Ce module présente les méthodes de calculs de la prime périodique pure, d'inventaire et commerciale les provisions mathématiques correspondantes suivant les trois méthodes prospective, rétrospective et récurrence, et comment procéder pour transformer de contrats.

MOEGLIN INSTITUTE 34 Boulevard du Midi 06150 CANNES LA BOCCA
tél + 33 4 93 90 54 15 fax + 33 4 93 49 91 18
Siret 534 918 073 00030 site www.moeglin.com mail support@moeglin.com

Sommaire

I EXERCICES PROPOSES

1 Assurances mixtes

Exercice 04-01 Contrat d'assurance mixte

Vous calculez la provision pure à l'âge x+t d'un contrat d'assurance mixte.
Vous transformez ce contrat pour que l'assuré verse sa cotisation annuelle jusqu'à ses 60 ans et vous calculez le nouveau montant de la prime annuelle pure

Exercice 04-02 Transformation d'un contrat d'assurance mixte

A la suite de l'aggravation du risque concernant un assuré qui a souscrit une mixte, on procède à une transformation du contrat. Vous calculez la durée supplémentaire de cotisation qui permet de maintenir le capital assuré à sa valeur initiale.

Exercice 04-03 Contrat d'assurance mixte indexée

Le travail qui vous est demandé consiste à établir différentes relations actuarielles concernant :

- le calcul des primes
- le calcul des primes stabilisées en cas de refus de l'indexation des primes
- le calcul des provisions
- le calcul des valeurs de réduction et rachat

2 Prédécès

Exercice 05-01
Vous étudier la garantie appelée « Prédécès » d'un contrat de retraite.
Vous calculez la valeur actuelle probable à la souscription des engagements de l'assureur.

3 Dépendance

Exercice 06-01

Vous construisez les tables de mortalité pour la population de valides et pour la population de dépendants. Puis vous calculez les primes et provisions relatives à un contrat de dépendance.

II Assurances mixtes

1 Exercice 04-01 Contrat d'assurance mixte

a Enoncé

On considère un ***contrat "assurance mixte"***, de durée n et de capital assuré C.
Une prime annuelle pure P est versée pendant p années.

Question 1

Donner la formule du calcul de la provision pure à l'âge x+t

Question 2

Applications numériques

a) calculer la provision pure à l'âge x+t=55

b) calculer la provision pure à l'âge x+t=56

Avec x=50, n=10, p=5, C=10 000 €
Table TD 88/90, taux technique = 4.50%

Question 3

L'assuré demande la transformation de son contrat à x+t=55 ans.
Il souhaite désormais verser sa cotisation annuelle jusqu'à ses 60 ans.

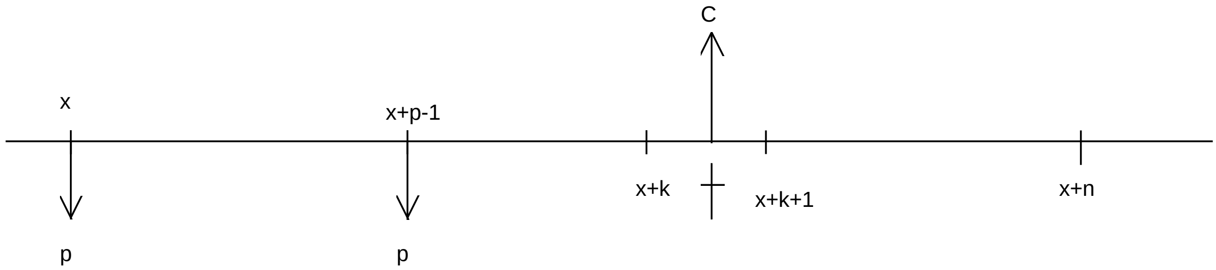
a) rappeler la méthode à utiliser pour effectuer cette transformation et donner l'équation correspondante.

b) calculer le nouveau montant de la prime annuelle pure.

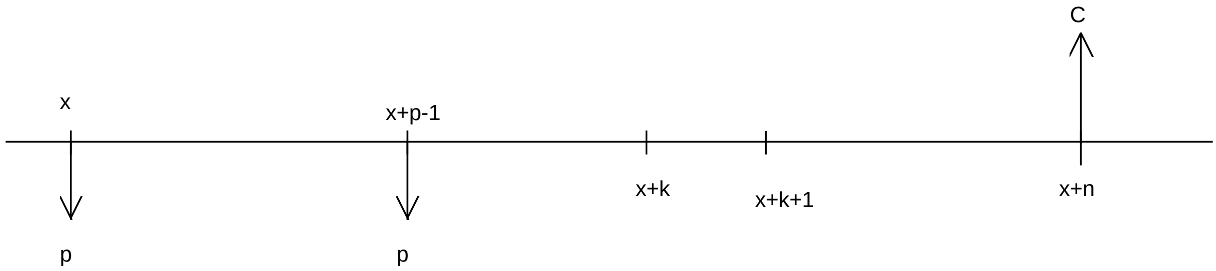
b Correction

Question 1

En cas de décès avant l'âge x+n :



En cas de vie à l'âge x+n :



${}_tV_x =$ Engagements futurs de l'assureur - engagements futurs de l'assuré

La prime annuelle, pour 1 € de capital, est la suivante : $\bar{A}_{x:n} = \bar{A}^1_{x:n} + {}_nE_x$

si x+t ≤ x+p-1 :

$${}_tV_x = C \times \left(\sum_{k=t}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \times \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \times v^{k-t+1/2} + \frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} \times v^{n-t} \right) - P \times \sum_{k=t}^{p-1} \frac{l_{x+k}}{l_{x+t}} \times v^k$$

$${}_tV_x = C \times \left(\bar{A}^1_{x+t:n-t} + {}_{n-t}E_{x+t} \right) - P \times \ddot{a}_{x+t:p-t}$$

si x+t ≥ x+p :

$${}_tV_x = C \times \left(\bar{A}^1_{x+t:n-t} + {}_{n-t}E_{x+t} \right)$$

Calcul de la prime P :

A t=0, ${}_0V_x = 0$ car les engagements de l'assureur et de l'assuré sont égaux.

Donc $P \times \ddot{a}_{x:p} = C \times \left(\bar{A}^1_{x:n} + {}_nE_x \right)$

D'où $P = \dfrac{C \times \left(\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \dfrac{D_{x+n}}{D_x} \right)}{\dfrac{N_x - N_{x+p}}{D_x}} = C \times \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$

Question 2

Applications numériques

$$P = 10000 \times \frac{(3540.44 - 2765.39 + 5837.43)}{(152956.14 - 107493.90)}$$ = **1454,40 €**

$${}_5V_{50} = 10000 \times \left(\frac{M_{55} - M_{60}}{D_{55}} + \frac{D_{60}}{D_{55}} \right)$$ = **8078.98 €**

$${}_6V_{50} = 10000 \times \left(\frac{M_{56} - M_{60}}{D_{56}} + \frac{D_{60}}{D_{56}} \right)$$ = **8423,45 €**

Question 3

a) On égalise, au moment de la transformation, les valeurs actuelles des engagements futurs assureur et assuré.

b) La nouvelle prime est nulle. La transformation aurait dû se faire jusqu'à x+t=54 pour obtenir une nouvelle prime. A x+t=55, comme le versement de la prime est à terme anticipé, l'assuré ne doit plus rien à l'assureur.

2 Exercice 04-02 Transformation d'un contrat d'assurance mixte

a Enoncé

A la suite de l'aggravation du risque concernant un assuré qui a souscrit une mixte pour un capital assuré de C €, on envisage de procéder à la transformation suivante.

- La surprime qui permet de faire face à l'aggravation du risque, sera prélevée sur la provision pure ${}_{n-t}V_{x+t}$. Cette surprime S, pour C € de capital est égale à : $S = s \times \left(C - {}_{n-t}V_{x+t}\right)$ avec s = 6.5%.
- La durée de paiement des primes reste inchangée.

Question A

Donner l'équation du calcul de la durée supplémentaire m qui permet de maintenir le capital assuré à sa valeur initiale C €.

Question B

Applications numériques

Taux technique	4.50%
Table de mortalité	TD 73/77
Age à la souscription	x = 40 ans
Durée du contrat	n = 30 ans
Durée de paiement des primes	p = 30 ans
Capital assuré	C = 10 000 €

Calculer à x+t = 50 ans :

- le montant de la provision pure ${}_{n-t}V_{x+t}$,
- le montant de la surprime S,
- la durée supplémentaire m.

b Correction

Question A

Donner l'équation du calcul de la durée supplémentaire m qui permet de maintenir le capital assuré à sa valeur initiale C €.

Provision pure de l'assurance mixte

$$ {}_{n-t}V_{x+t} = C \times \left[\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + {}_{n-t}E_{x+t} \right] - P \times \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|} $$

Equation de calcul de la durée supplémentaire m

$$ {}_{n+m-t}V_{{}_m x+t} = {}_{n-t}V_{x+t} - S $$

avec $S = s \times \left(C - {}_{n-t}V_{x+t} \right)$

et ${}_{n+m-t}V_{{}_m x+t} = C \times \left[\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n+m-t}|} + {}_{n+m-t}E_{x+t} \right] - P \times \ddot{a}_{x+t:\overline{p-t}|}$

Question B

Applications numériques

Taux technique	4.50%
Table de mortalité	TD 73/77
Age à la souscription	x = 40 ans
Durée du contrat	n = 30 ans
Durée de paiement des primes	p = 30 ans
Capital assuré	C = 10 000 €

Calculer à x+t = 50 ans :

- *le montant de la provision pure* ${}_{n-t}V_{x+t}$

$$ {}_{30-10}V_{40+10} = {}_{20}V_{50} = 2179.25€ $$

- *le montant de la surprime S*

$$ S = 0.065 \times \left[10000 - {}_{20}V_{50} \right] = 508.35€ $$

- *la durée supplémentaire m*

Le calcul de m est déterminé par interpolation linéaire.

m	${}_{n+m-t}V_{\ {}_{m}\,x+t}$	${}_{n-t}V_{x+t} - S$	écart
5	1702.94	1670.90	32.04
6	1634.28	1670.90	-36.62

$$m = 5 + 12 \times \frac{1702.94 - 1670.90}{1702.94 - 1634.26} \rightarrow 5 \text{ ans et } 6 \text{ mois}$$

3 Exercice 04-03 Contrat d'assurance mixte indexée

a Enoncé

Une compagnie d'assurances sur la vie souhaite étudier un produit d'assurances du type mixte, indexé à un taux annuel.

Le travail qui vous est demandé consiste à établir différentes relations actuarielles.

Les caractéristiques du produit à étudier sont les suivantes :

Les garanties proposées

- C est le capital initial choisi par l'assuré, à la souscription du contrat, à l'âge x
- θ est le taux annuel d'indexation du capital
- n est la durée du contrat
- Un capital décès $C\times(1+\theta)^k$ est versé au bénéficiaire, si le décès survient entre $x+k$ et $x+k+1$. Le décès survient en moyenne à $x+k+\frac{1}{2}$.
- Un capital vie $C\times(1+\theta)^{n-1}$ est versé à l'assuré, s'il est vivant au terme du contrat, à l'âge x+n

Les cotisations
Les cotisations annuelles sont versées en début d'année, pendant la durée n du contrat. Elles sont également indexées au taux θ.

Les chargements
g+g' sont les chargements de gestion annuels qui s'applique au capital indexé, pendant la durée du contrat.

β est le chargement commercial de chaque cotisation commerciale ou brute.

γ est le chargement de fractionnement qui s'applique à la prime commerciale.

Table et taux technique
Table de mortalité : TD 73/77
Taux technique : 4,50%

Question I

Représenter les engagements de l'assureur et de l'assuré, sur un axe de temps, entre la souscription et le terme du contrat (entre x et x+n).

Question II

Etablir les relations actuarielles qui permettent de calculer, pour un capital initial C :

A. la cotisation unique pure
B. la cotisation unique d'inventaire
C. la cotisation unique commerciale

D. la cotisation annuelle pure
E. la cotisation annuelle d'inventaire
F. la cotisation annuelle commerciale

G. la provision mathématique pure pour un contrat à prime unique
H. la provision mathématique pure pour un contrat à primes annuelles

I. la provision mathématique d'inventaire pour un contrat à prime unique
J. la provision mathématique d'inventaire pour un contrat à primes annuelles

K. la valeur de réduction I_{x+k} à l'âge x+k

Rappel : L'assuré cesse de payer sa prime annuelle à l'âge x+k. Un nouveau capital constant I_{x+k} doit être calculé. Ce capital est versé au décès de l'assuré ou au terme du contrat s'il est vivant.

L. la prime annuelle pure stabilisée
M. la prime annuelle d'inventaire stabilisée
N. la prime annuelle commerciale stabilisée

<u>Rappel</u> : L'assuré refuse l'indexation annuelle de sa prime, à l'âge x+k. Le capital garanti est stabilisé au niveau atteint. Une nouvelle prime stabilisée doit alors être calculée.

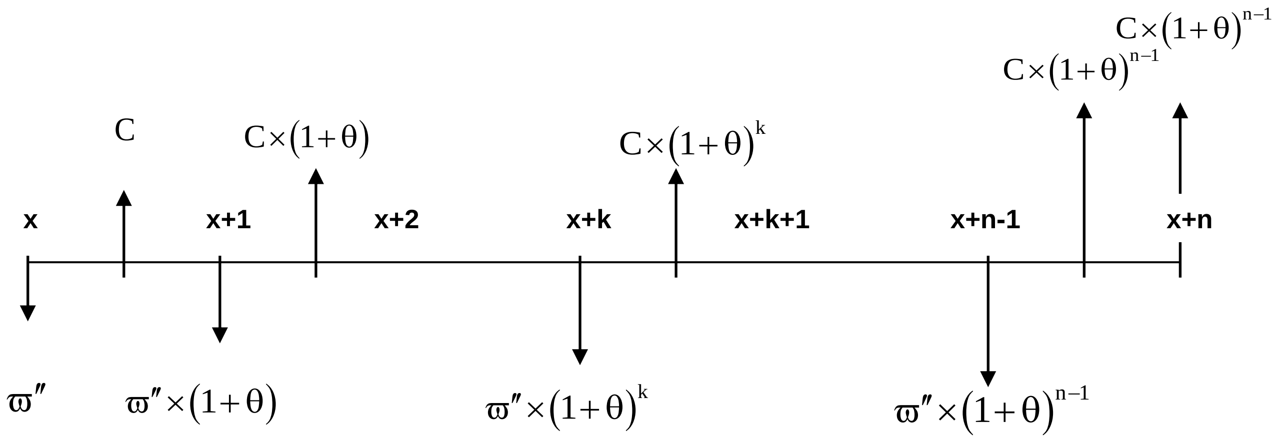
O. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle
P. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle, réduit à l'âge x+k
Q. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle, stabilisé à l'âge x+k

<u>Rappel</u> : La valeur de rachat correspond à l'indemnité versée à l'assuré qui a demandé la résiliation de son contrat. Aucune pénalité n'est prélevée dans ce contrat.

b Correction

Question I

Représentation des engagements de l'assureur et de l'assuré, sur un axe de temps, entre la souscription et le terme du contrat (entre x et x+n).



Question II

A. La cotisation unique pure

On pose :

$$\frac{1+\theta}{1+i}=\frac{1}{1+\omega}$$

Ce changement de variable est à faire lorsque nous avons un taux de revalorisation et un taux d'actualisation. Il permet de simplifier les formules de calculs.

$$\Pi_x^c = C\times\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+\theta)^k\times{}_k p_x\times q_{x+k}\times v^{k+\frac{1}{2}}\right)+C\times(1+\theta)^{n-1}\times{}_n p_x\times v^n$$

avec

$${}_k p_x=\frac{l_{x+k}}{l_x}\qquad q_{x+k}=\frac{d_{x+k}}{l_{x+k}}$$

Après simplification, en utilisant les commutations , M_x^ω et D_x^ω calculées avec le taux ω,on obtient:

$$\boxed{PUP=\Pi_x^{compagnie}=\Pi_x^c=C\times(1+\theta)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{M_x^\omega-M_{x+n}^\omega}{D_x^\omega}+C\times(1+\theta)^{-1}\times\frac{D_{x+n}^\omega}{D_x^\omega}}$$

B. La cotisation unique d'inventaire

$$PUI=\Pi'^c_x=\Pi^c_x+C\times(g+g')\times\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega)$$

avec $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega)$ qui est la fonction $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ calculée avec le taux (ω)

C. La cotisation unique commerciale

$$\boxed{PUC = \Pi''^{c}_{x} = \frac{1}{1-\beta} \times \Pi'^{c}_{x}}$$

D. La cotisation annuelle pure notée ω est la solution de l'équation suivante :

$$\boxed{\varpi \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega) = \Pi^{c}_{x}}$$

On égalise à la souscription les engagements de l'assureur et de l'assuré

E. la cotisation annuelle d'inventaire

$$\varpi' \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega) = \Pi^{c}_{x} + C \times (g+g') \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega)$$

$$\boxed{\varpi' = \varpi + C \times (g+g')}$$

F. La cotisation annuelle commerciale

$$\varpi'' \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega) = \varpi' \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega) + \beta \times \varpi'' \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\omega)$$

$$\boxed{\varpi'' = \frac{\varpi + C \times (g+g')}{1-\beta}}$$

La cotisation fractionnée en m versements (m=2 semestrielle, m=4 trimestrielle, m=12 mensuelle)

$$\boxed{\varpi''\text{fractionnée} = \frac{\frac{\varpi + C \times (g+g')}{1-\beta} \times (1+\gamma)}{m}}$$

G. La provision mathématique pure pour un contrat à prime unique

$$\boxed{PMP_{PU} = C \times (1+\theta)^{k-\frac{1}{2}} \times \frac{\overline{M}^{\omega}_{x+k} - \overline{M}^{\omega}_{x+n}}{D^{\omega}_{x+k}} + C \times (1+\theta)^{k-1} \times \frac{D^{\omega}_{x+n}}{D^{\omega}_{x+k}}}$$

H. La provision mathématique pure pour un contrat à primes annuelles

$$\boxed{PMP_{PA}=(1+\theta)^k\times\left(\frac{C}{(1+\theta)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{\overline{M}^{\varpi}_{x+k}-\overline{M}^{\varpi}_{x+n}}{D^{\varpi}_{x+k}}+\frac{C}{(1+\theta)}\times\frac{D^{\varpi}_{x+n}}{D^{\varpi}_{x+k}}-\varpi\times\frac{N^{\varpi}_{x+k}-N^{\varpi}_{x+n}}{D^{\varpi}_{x+k}}\right)}$$

I. La provision mathématique d'inventaire pour un contrat à prime unique

$$\boxed{PMI_{PU}=PMP_{PU}+(g+g')\times(1+\theta)^k\times\frac{N^{\varpi}_{x+k}-N^{\varpi}_{x+n}}{D^{\varpi}_{x+k}}}$$

J. La provision mathématique d'inventaire pour un contrat à primes annuelles

$$\boxed{PMI_{PA}=PMP_{PA}+\text{provision de gestion}}$$

La provision de gestion est nulle, les engagements de l'assureur et de l'assuré sont identiques (voir cours chapitre VIII, tableau Les provisions mathématiques corrigées)

K. La valeur de réduction à l'âge x+k I_{x+k}

Soit V'_{x+k} = PM d'inventaire du contrat avant l'arrêt des versements.

Cette somme est considérée comme une Prime unique encaissée à x+k, pour faire face aux nouvelles garanties prévues dans la réduction, c'est-à-dire versement de I_{x+k} au décès entre x+k et x+n ou versement de I_{x+k} à x+n si l'assuré est vivant.

On égalise les provisions d'inventaire :

$$I_{x+k}\times\Pi'^{\,c\;n-k}_{\;\;x+k}=V'_{x+k}$$

$$\boxed{I_{x+k}=\frac{\frac{1}{D_{x+k}}\times\left[\sum_{j=k}^{n-1}(1+\theta)^j\times\overline{C}_{x+j}+(1+\theta)^{n-1}\times D_{x+n}\right]-\varpi\times\left(\sum_{j=k}^{n-1}(1+\theta)^j\times\frac{D_{x+j}}{D_{x+k}}\right)}{\frac{\overline{M}_{x+k}-\overline{M}_{x+n}}{D_{x+k}}+(g+g')\times\frac{N_{x+k}-N_{x+n}}{D_{x+k}}+\frac{D_{x+n}}{D_{x+k}}}}$$

L. La prime annuelle pure stabilisée

La garantie est maintenue au niveau atteint et on calcule la nouvelle prime correspondante.

On note ${}_s\varpi_{x+k}$ la prime pure stabilisée.

On utilise la relation V'_{x+k} (PM avant stabilisation) = (PM après stabilisation qui est une mixte normale, sans indexation du capital et de la prime), pour calculer ${}_s\varpi_{x+k}$

$$V'_{x+k} = C\times(1+\theta)^{k-1}\times\left[\bar{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} + {}_{n-k}E_{x+k}\right] - {}_{\text{stabilisée}}\varpi_{x+k}\times\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

$$\boxed{{}_{\text{stabilisée}}\varpi_{x+k} = \frac{C\times(1+\theta)^{k-1}\times\left[\dfrac{M_{x+k}-M_{x+n}}{D_{x+k}}+\dfrac{D_{x+n}}{D_{x+k}}\right]-V'_{x+k}}{\dfrac{N_{x+k}-N_{x+n}}{D_{x+k}}}}$$

M. La prime annuelle d'inventaire stabilisée

$${}_{s}\varpi'_{x+k}\times\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} = {}_{s}\varpi_{x+k}\times\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} + C\times(1+\theta)^{k-1}\times(g+g')\times\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

$$\boxed{{}_{s}\varpi'_{x+k} = {}_{s}\varpi_{x+k} + C\times(1+\theta)^{k-1}\times(g+g')}$$

N. la prime annuelle commerciale stabilisée

$$\boxed{{}_{s}\varpi''_{x+k} = \frac{{}_{s}\varpi'_{x+k}}{(1-\beta)}}$$

O. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle

Elle correspond à la provision d'inventaire

$$\boxed{V'_{x+k+t} = \frac{1}{D_{x+k+t}}\times\left[\sum_{j=k+t}^{n-1}(1+\theta)^{j}\times C_{x+j} + (1+\theta)^{n-1}\times D_{x+n}\right] - \varpi_{x}\times\left(\sum_{j=k+t}^{n-1}(1+\theta)^{j}\times\frac{D_{x+j}}{D_{x+k+t}}\right)}$$

P. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle, réduit à l'âge x+k

$$\boxed{V'_{x+k+t} = I_{x+k}\times\left[\left[\bar{A}^{1}_{x+k+t:\overline{n-k-t}|} + {}_{n-k-t}E_{x+k+t}\right] - (g+g')\times\ddot{a}_{x+k+t:\overline{n-k-t}|}\right]}$$

Q. la valeur de rachat à l'âge x+k+t, d'un contrat à prime annuelle, stabilisé à l'âge x+k

$$\boxed{V'_{x+k+t} = C\times(1+\theta)^{k-1}\times\left[\bar{A}^{1}_{x+k+t:\overline{n-k-t}|} + {}_{n-k-t}E_{x+k+t}\right] - {}_{\text{stabilisée}}\varpi_{x+k}\times\ddot{a}_{x+k+t:\overline{n-k+t}|}}$$

III Prédécès

1 Exercice 05-01

a Enoncé

Nous allons étudier la garantie appelée « Prédécès » d'un contrat de retraite.

L'article 12 Prédécès, du règlement du contrat stipule que :
« En cas de décès d'un participant avant le versement de son premier arrérage de retraite, la veuve bénéficiera à 55 ans, et le veuf à 60 ans, du service d'une rente calculée à partir de 60% du nombre des unités de rente inscrit au compte du participant au moment de son décès… »

Question A

1- Représenter les engagements de l'ASSUREUR sur un axe des temps, entre la souscription du participant et la date d'entrée en retraite prévue à 65 ans.

Considérer que le bénéficiaire à une rente annuelle de 1 € à terme échu.

Distinguer 2 cas :

a) le bénéficiaire n'a pas encore atteint l'âge prévu de 55 ans pour une femme, 60 ans pour un homme, au décès du participant

b) le bénéficiaire a dépassé l'âge prévu de 55 ans pour une femme, 60 ans pour un homme, au décès du participant

Notations :
x = âge du participant à la souscription
y = âge du bénéficiaire du prédécès, à la souscription

Question B

Etablir les relations actuarielles qui permettent de calculer la valeur actuelle probable à la souscription des engagements de l'assureur pour les cas a) et b).

Question C

Présenter le(s) tableur(x) pour inscrire les résultats des calculs des valeurs actuelles probables des engagements assureur.

Calculer ces valeurs et compléter le(s) tableau(x) en utilisant :
x = 50 à 70 ans
y = 50 à 70 ans
Table TV 73/77
Taux technique : 4,50 %

b Correction

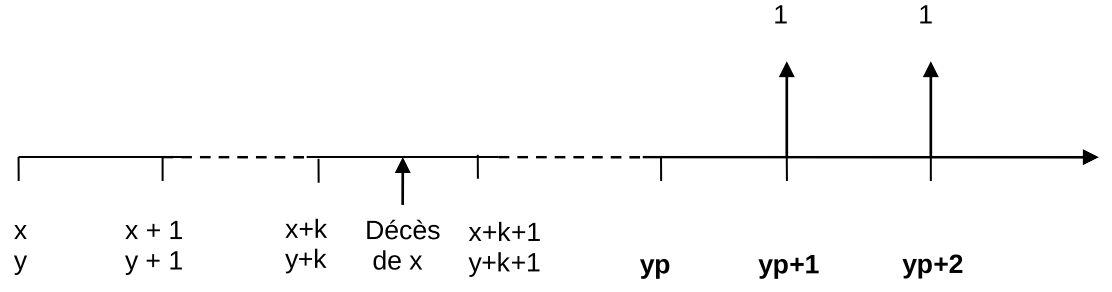
Question A

2- *Représenter les engagements de l'ASSUREUR sur un axe des temps, entre la souscription du participant et la date d'entrée en retraite prévue à 65 ans.*

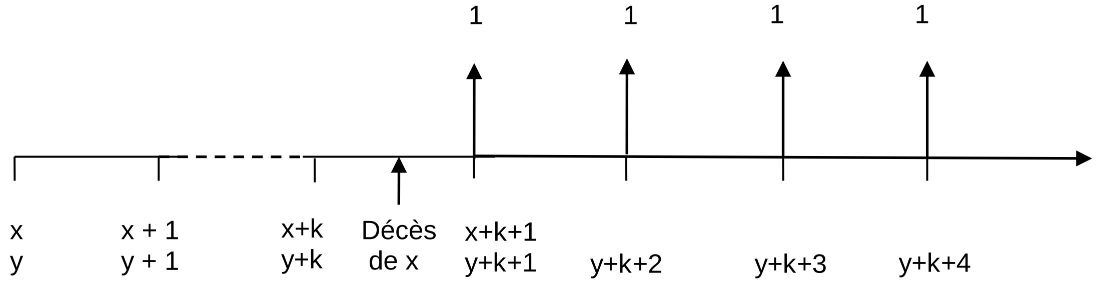
Considérer que le bénéficiaire à une rente annuelle de 1 € à terme échu.

Distinguer 2 cas :

a) *le bénéficiaire n'a pas encore atteint l'âge* Y_p *prévu de 55 ans pour une femme, 60 ans pour un homme, au décès du participant*



b) *le bénéficiaire a dépassé l'âge* Y_p *prévu de 55 ans pour une femme, 60 ans pour un homme, au décès du participant*



Notations :

x = âge du participant à la souscription
y = âge du bénéficiaire du prédécès, à la souscription
yp = âge du bénéficiaire à partir duquel la rente est versée

Question B

*Etablir les relations actuarielles qui permettent de calculer la valeur actuelle probable à la souscription des engagements de l'assureur **VAP Ass** ^{r} pour les cas a) et b).*

Cas a

Si l'assuré x décède au cours de l'année k+1, l'assureur versera une rente **différée** à terme échu au bénéficiaire y, si l'âge y+k est **inférieur** ou égal à l'âge minimum requis yp
.

$$\boxed{\text{VAP ASS}^r = \sum_{k=0}^{65-x-1} {}_k p_x \times q_{x+k} \times {}_{yp-(y+k)|} a_{y+k} \times v_{x+k}^{\ k}}$$

Cas b

Si l'assuré x décède au cours de l'année k+1, l'assureur versera une rente **immédiate** à terme échu au bénéficiaire y, si l'âge y+k est **supérieur** ou égal à l'âge minimum requis yp

$$\text{VAP ASS}^r = \sum_{k=0}^{65-x-1} {}_k p_x \times q_{x+k} \times a_{y+k} \times v_{x+k}^{\ k}$$

Question C

Présenter le(s) tableur(x) pour inscrire les résultats des calculs des valeurs actuelles probables des engagements assureur.

Calculer ces valeurs et compléter le(s) tableau(x) en utilisant :
x = 50 à 70 ans
y = 50 à 70 ans
Table TV 73/77
Taux technique : 4,50 %

IV Dépendance

1 Exercice 06-01

a Enoncé

L'Etat et les assureurs portent un intérêt nouveau à la santé des personnes âgées, et tout particulièrement à leur état de **DEPENDANCE.**

Question 1

Construire les tables de mortalité pour 100 000 individus à la naissance
- pour la population de valides,
- pour la population de dépendants.

Question 2

Etablir les relations actuarielles pour déterminer :

- les primes uniques et annuelles à verser par une personne valide pour bénéficier d'une rente mensuelle à terme échu, dès son entrée en dépendance,
- la prime unique à verser par une personne dépendante pour bénéficier immédiatement d'une rente mensuelle à terme échu,
- les provisions mathématiques correspondantes.

Question 3

- **Calculer les primes** uniques et annuelles pour servir une rente mensuelle de 1000 € à terme échu, dès l'entrée en dépendance, pour les personnes valides âgées de 50 à 80 ans,
- **Calculer les primes** uniques concernant les personnes dépendantes âgées de 50 à 80 ans, pour leur servir une rente mensuelle immédiate de 1000 € à terme échu,
- **Calculer des provisions mathématiques** correspondantes. Dans le cas de la prime annuelle, calculer uniquement les provisions pour un contrat souscrit à 50 ans,

BASE TECHNIQUE

- taux technique i = 3.50%
- table de mortalité TD 88/90
- taux de mortalité des actifs $q_{xa} = 0.75 * q_x (\mathrm{TD}\ 88/90)$
- taux de mortalité des dépendants $q_{xi} = 2.00 * q_x (\mathrm{TD}\ 88/90) + 0.035$
- taux d'entrée en dépendance des actifs $i_{xa} = 1.35 * 0.00041 * \exp^{(x-52)/8}$
- chargements
  - de paiement des rentes α = 5.00%
  - d'encaissement des primes θ = 5.00%

- Evolution de la population des actifs

$$l_{(x+1)a} = l_{xa} - q_{xa} \times l_{xa} - i_{xa} \times l_{xa} = (p_{xa} - i_{xa}) \times l_{xa}$$ (Sorties : décès, dépendance)

- Evolution de la population des dépendants

$$l_{(x+1)i} = l_{xi} - q_{xi} \times l_{xi} = p_{xi} \times l_{xi}$$ (Sortie : décès)

b Correction

Question 1

A partir des formules ci-dessous, on construit la table de mortalité des populations valides et des populations en dépendance.

$$l_{(x+1)a} = l_{xa} - q_{xa} \times l_{xa} - i_{xa} \times l_{xa} = (p_{xa} - i_{xa}) \times l_{xa}$$

$$l_{(x+1)i} = l_{xi} - q_{xi} \times l_{xi} = p_{xi} \times l_{xi}$$

Le tableau suivant présente les tables calculées de l'âge 20 à l'âge 35.

Age x	l_x	q_{xa}	l_{xa}	q_{xi}	i_x	p_{xi}	l_{xi}
20	98277	0,0011	98 701	0,0378	0,0000	0,9622	47 300
21	98137	0,0011	98 595	0,0381	0,0000	0,9619	45 510
22	97987	0,0012	98 481	0,0382	0,0000	0,9618	43 778
23	97830	0,0012	98 361	0,0381	0,0000	0,9619	42 105
24	97677	0,0012	98 244	0,0381	0,0000	0,9619	40 500
25	97524	0,0012	98 127	0,0381	0,0000	0,9619	38 956
26	97373	0,0012	98 011	0,0381	0,0000	0,9619	37 472
27	97222	0,0012	97 895	0,0381	0,0000	0,9619	36 044
28	97070	0,0012	97 778	0,0382	0,0000	0,9618	34 670
29	96916	0,0012	97 659	0,0382	0,0000	0,9618	33 347
30	96759	0,0013	97 537	0,0383	0,0000	0,9617	32 072
31	96597	0,0013	97 411	0,0385	0,0000	0,9615	30 842
32	96429	0,0014	97 280	0,0386	0,0000	0,9614	29 655
33	96255	0,0014	97 144	0,0388	0,0001	0,9612	28 510
34	96071	0,0015	97 000	0,0390	0,0001	0,9610	27 403
35	95878	0,0016	96 848	0,0392	0,0001	0,9608	26 334

Question 2

PRIMES ANNUELLES et UNIQUES COMMERCIALES pour les ACTIFS

$$PAC_{xa} = \frac{\Pi_{xa}}{(1-\theta) \times \ddot{a}_{xa}} \qquad PUC_{xa} = \frac{\Pi_{xa}}{(1-\theta)}$$

$$\Pi_{xa} = (1+\alpha) \times R \times \sum_{k=0}^{\omega\text{-}xa} \left(\frac{l_{(x+k)a}}{l_{xa}} \times i_{xa+k} \times v^k \times a^m_{xi+k} \right)$$

$$\ddot{a}_{xa} = \sum_{k=0}^{\omega\text{-}xa} \left(\frac{l_{(x+k)a}}{l_{xa}} \times v^k \right)$$

PRIMES UNIQUES COMMERCIALES pour les DEPENDANTS

$$\boxed{PUC_{xi}^{12} = \frac{(1+\alpha) \times R \times a_{xi}^{12}}{(1-\theta)}}$$

$$a_{xi}^{12} = a_{xi} + \frac{11}{24} = \sum_{k=0}^{\omega\text{-}xi} \left(\frac{l_{(x+k)i}}{l_{xi}} \times v^k \right) + \frac{11}{24}$$

PROVISIONS MATHEMATIQUES pour les ACTIFS

contrat à prime unique :

$$\boxed{{}_tV_{xa} = PU_{xa+t} = (1-\theta) \times PUC_{xa+t}}$$

contrat à prime annuelle :

$$\boxed{{}_tV_{xa} = \Pi_{xa+t} - (1-\theta) \times PAC_{xa} \times \ddot{a}_{xa+t} = (1-\theta) \times \left(PUC_{xa+t} - PAC_{xa} \times \ddot{a}_{x+t} \right)}$$

PROVISIONS MATHEMATIQUES pour les DEPENDANTS

Contrat à prime unique : $\boxed{{}_tV_{xi} = PU_{xi+t} = (1-\theta) \times PUC_{xi+t}}$

Question 3

Le tableau suivant présente les primes uniques commerciales pour les dépendants (PUC_{xi}) et les actifs (PUC_{xa}), ainsi que la prime annuelle commerciale pour les actifs (PAC_{xa}).

Age x	PUC_{xi}	PUC_{xa}	PAC_{xa}
50	134 578	5 368	273
51	131 757	5 473	285
52	128 906	5 577	297
53	126 037	5 681	309
54	123 141	5 784	323
55	120 220	5 885	336
56	117 314	5 985	351
57	114 369	6 083	366
58	111 383	6 177	382
59	108 398	6 268	399
60	105 393	6 354	416
61	102 386	6 436	434
62	99 355	6 511	453
63	96 301	6 580	472
64	93 211	6 639	492
65	90 048	6 688	513
66	86 819	6 726	535
67	83 494	6 751	557
68	80 140	6 763	580
69	76 760	6 763	604
70	73 361	6 749	628
71	69 927	6 720	653
72	66 594	6 679	679
73	63 250	6 623	705
74	59 936	6 551	731
75	56 615	6 462	758
76	53 368	6 359	785
77	50 126	6 239	812
78	46 987	6 106	839
79	43 969	5 960	866
80	41 025	5 800	892

Le tableau suivant présente les provisions pour les dépendants (PUC_{xi}) et les actifs (PUC_{xa}).

Age x	${}_tV_{xi}$ [PU]	${}_tV_{xa}$ [PU]	${}_tV_{xa}$ [PA]
50	130 541	5 207	0
51	127 805	5 309	215
52	125 039	5 410	430
53	122 256	5 511	646
54	119 447	5 610	861
55	116 614	5 709	1 076
56	113 795	5 806	1 289
57	110 938	5 901	1 501
58	108 042	5 992	1 710
59	105 146	6 080	1 915
60	102 231	6 164	2 117
61	99 314	6 243	2 315
62	96 374	6 316	2 507
63	93 412	6 382	2 692
64	90 415	6 440	2 869
65	87 347	6 488	3 037
66	84 215	6 524	3 194
67	80 990	6 548	3 340
68	77 736	6 561	3 474
69	74 457	6 560	3 595
70	71 161	6 546	3 702
71	67 830	6 518	3 794
72	64 596	6 479	3 873
73	61 352	6 424	3 936
74	58 138	6 355	3 982
75	54 916	6 268	4 010
76	51 767	6 168	4 022
77	48 622	6 051	4 016
78	45 577	5 923	3 995
79	42 650	5 781	3 958
80	39 794	5 626	3 904