



MOEGLIN INSTITUTE

Actuariat – Finance – Informatique – Formation

Module 6

Mathématiques des Assurances de personnes

Actuariat Retraite par Répartition

Publication: décembre 2017

Alain Moeglin, actuaire, membre certifié de l'Institut des Actuaire IA

Synthèse

La retraite par répartition est basée sur le principe de solidarité intergénérationnelle. Les actifs cotisent pour payer les retraites des retraités. Ce module présente les équations d'équilibre simplifiées d'un tel système.

Sommaire

CHAPITRE XV ACTUARIAT RETRAITE PAR REPARTITION	3
I INTRODUCTION ACTUARIAT RETRAITE PAR REPARTITION -.....	4
PARAMETRES TECHNIQUES	4
CARACTERISTIQUES DU REGIME PAR REPARTITION	4
II REGIME DE RETRAITE EN GROUPE FERME	5
III REGIME DE RETRAITE EN GROUPE OUVERT	6
IV ANALYSE D'UN REGIME PAR REPARTITION	7
EQUATION SIMPLIFIEE D'UN REGIME PAR REPARTITION POUR UN EQUILIBRE ANNUEL	7
<i>a Calcul du rapport entre la retraite moyenne et salaire d'activité moyen</i>	<i>7</i>
<i>b Exemple de calcul</i>	<i>8</i>
MISE EN EQUATION SIMPLIFIEE D'UN REGIME PAR REPARTITION AVEC PRISE EN COMPTE DES RENDEMENTS FINANCIERS (EN GROUPE FERME).....	9
<i>c Rapport entre la retraite moyenne et le salaire moyen d'activité</i>	<i>11</i>
<i>d Calcul du taux de couverture dynamique du régime:.....</i>	<i>11</i>
V REGIME DE RETRAITE EN POINTS.....	12
ELEMENTS DE CALCUL	13

CHAPITRE XV ACTUARIAT RETRAITE PAR REPARTITION

CHAPITRE XV

ACTUARIAT RETRAITE PAR REPARTITION

I Introduction Actuariat Retraite par Répartition -

La retraite par répartition est basée sur le principe de solidarité intergénérationnelle. Les actifs cotisent pour payer les retraites des retraités.

L'adhésion à un régime de retraite par répartition est habituellement, irréversible et obligatoire, pour le périmètre considéré, par exemple une catégorie socioprofessionnelle (salariés non cadres, salariés cadres, travailleurs non salariés ...).

Paramètres techniques

Les principaux paramètres techniques sont les suivants :

- **Le Taux de cotisation** qui est appliqué au salaire brut de l'actif
- **la retraite** ou la pension qui se calcule en fonction du salaire de fin de carrière, de l'ancienneté et d'un taux de pension.

Le Taux de la pension est souvent majoré en fonction du nombre d'enfants et du nombre de trimestres au-delà de la durée de cotisations pour atteindre le taux plein. Il peut être minoré en cas de trimestres manquants.

- **Rapport démographique :**

C'est le quotient entre le nombre total des actifs et celui des retraités

- **Taux de couverture :**

C'est le quotient entre les ressources (les réserves disponibles à la date de calcul et valeur actuelle probable des cotisations futures) et les prestations (valeur actuelle probable des droits déjà acquis par les retraités et les droits acquis et à acquérir par les actifs).

Caractéristiques du régime par répartition

L'évolution d'un régime dépend de nombreux paramètres, comme par exemple :

- **paramètres socio professionnels :**

- évolution des salaires
- âge de départ à la retraite
- situation familiale

- **paramètres démographiques :**

- le taux de fécondité
- nouveaux entrants
- pyramide des âges
- espérance de vie

- **Economiques :**

- taux de rendement du régime
- Situation économique (crise financière, chômage, taux de croissance ...)
- Augmentation des salaires, des retraites

II Régime de retraite en groupe fermé

Dans un régime de retraite en groupe fermé, on se limite uniquement aux affiliés actifs et retraités qui sont présents à la date du calcul. On ne tient donc pas compte des futurs actifs qui rentreront dans le régime.

Pour cette population fermée et jusqu'à son extinction, nous allons comparer les ressources aux prestations, à la date de calcul.

- Les **ressources** se composent des réserves W qui sont disponibles à la date de calcul et de la valeur actuelle probable (VAP) des cotisations futures des actifs affiliés au régime.

- Les **engagements** se composent de la valeur actuelle probable des prestations en cours pour les retraités et également des droits acquis et à acquérir par les actifs.

Indicateur : TC Taux de couverture

$$TC = \frac{W + VAP_{cotisations}}{VAP_{RetraitedesActifs} + VAP_{RetraitedesRetraités}}$$

Par exemple, si le taux de couverture du régime est de 45% on en déduit que 55% des droits des adhérents actuels devront être financés par de futurs adhérents.

III Régime de retraite en groupe ouvert

Dans un régime de retraite en groupe ouvert, on tient compte également des nouveaux affiliés qui contribueront dans le futur aux ressources du régime en plus des actifs déjà présents à la date de calcul.

Pour cette population ouverte, nous allons également comparer, à la date de calcul puis dans le temps, les ressources aux prestations, avec le rapport de charge instantané.

Les Indicateurs

TC Taux de couverture à la date de calcul

$$TC = \frac{W + VAP_{cotisations}}{VAP_{RetraitedesActifs} + VAP_{RetraitedesRetraités}}$$

Rapport de charge instantané exprime le quotient des ressources et des charges au cours du temps

$$r_c = \frac{\text{Ressources disponibles}}{\text{Prestations payées}}$$

Horizon de viabilité

C'est la durée à partir de laquelle le régime n'arrive plus à financer ses engagements malgré les nouvelles générations des actifs.

La réserve disponible devient négative à partir de cette durée appelée Horizon de viabilité.

Rapport démographique

$$r_d = \frac{\text{Nombre d'actifs}}{\text{Nombre de retraités}}$$

IV Analyse d'un régime par répartition

Equation simplifiée d'un régime par répartition pour un équilibre annuel

a Calcul du rapport entre la retraite moyenne et salaire d'activité moyen

Dans l'approche de l'**équilibre annuel du régime**, on égalise Ressources de l'année aux Prestations de la même année, sans tenir compte de la réserve initiale W.

Les ressources sont égales aux cotisations de l'année, versées par les cotisants
 Les prestations sont égales aux rentes de l'année, versées aux retraités

Notations :

*Salaire*_{actif i} salaire annuel de l'actif_i

θ taux de cotisation

*Retraite*_{retraité j} rente annuelle du retraité_j

$A(x)$ nombre des actifs d'âge x A nombre total des actifs $A = \sum_x A(x)$

$Sm(x)$ salaire moyen à l'âge x

$R(x)$ nombre des retraités d'âge x R nombre total des retraités $R = \sum_x R(x)$

$Rm(x)$ rente moyenne à l'âge x

$$\text{Ressources} = \sum_{\text{actif } i}^{\text{tous les actifs du régime}} \theta \times \text{Salaire}_{\text{actif } i}$$

$$\text{Prestations} = \sum_{\text{retraité } j}^{\text{tous les retraités du régime}} \text{Retraite}_{\text{retraité } j}$$

Pour simplifier les calculs, si on considère que :

- tous les salariés de même âge x ont le même salaire moyen $Sm(x)$
- et tous les retraités de même âge x ont la même retraite moyenne $Rm(x)$

$$\text{Ressources} = \theta \times \sum_x A(x) \times Sm(x)$$

$$\text{prestations} = \sum_x R(x) \times Rm(x)$$

De plus, en faisant l'hypothèse que le salaire moyen et la retraite moyenne sont les mêmes à tout âge x soit $S_m(x) = S_m$ et $R_m(x) = R_m$

On obtient l'équation simplifiée suivante :

$$\text{Ressources} = \theta \times A \times S_m = \text{Prestations} = R \times R_m$$

d'où $\frac{R_m}{S_m} = \theta \times \frac{A}{R}$ avec $\frac{A}{R}$ rapport démographique

b Exemple de calcul

Soit un rapport démographique du régime $\frac{A}{R} = 4$ et le montant de la pension défini comme suit :

$$R_m = \text{Min}(2\% \times \text{anc}; 75\%) \times \text{Salaire de fin de carrière}$$

anc = nombre d'années d'ancienneté du salarié à son départ en retraite

- Si on suppose que $S_{\text{fin de carrière}} = S_m$ et que l'ancienneté = 40 ans, on obtient le taux de cotisation suivant, qui assure la répartition intégrale :

$$R_m = \theta \times \frac{A}{R} \times S_m \quad 75\% \cdot S_m = 4 \cdot \theta \cdot S_m \Rightarrow \theta = \frac{75\%}{4} = 18,75\%$$

b) Si le rapport démographique devient égal à 2 $A=2R$ on obtient un taux de cotisation doublé

$$75\% \cdot S_m = 2 \cdot \theta \cdot S_m \Rightarrow \theta = \frac{75\%}{2} = 37,50\% \Rightarrow \text{le taux de cotisation est doublé}$$

c) si âge de départ est réduit à 60 ans

Alors, $R_m = \text{Min}(2\% \times \text{anc} , 75\%) = \text{Min}(2\% \times (60-25), 75\%) = 2\% \times 35 = 70\%$ (au lieu de 75% à 65 ans)

Si $A'=4R'$ $70\% \cdot S_m = 4 \cdot \theta \cdot S_m \Rightarrow \theta = \frac{70\%}{4} = 17,5\%$ $A' = \sum_{x=25}^{59} A(x)$ $R' = \sum_{x=60}^w R(x)$

Si $A'=2R'$ $70\% \cdot S_m = 2 \cdot \theta \cdot S_m \Rightarrow \theta = \frac{70\%}{2} = 35\%$

Récapitulatif des taux de cotisations :

	Départ à 65 ans	Départ à 60 ans => légère baisse de la pension de 5%
A=2R	37,50%	35%
A=4R	18,75%	17,5%

Retour à l'équilibre passe par les choix suivants évidents de baisse des prestations, augmentation des ressources (les cotisations), augmentation de l'âge de départ à la retraite...

Mise en équation simplifiée d'un régime par répartition avec prise en compte des rendements financiers (en groupe fermé)

Notations

$Salaire_{(i,x)}$: salaire de l'actif i à l'âge x

j : indexation annuelle du salaire

θ : taux de cotisation

r : âge de départ à la retraite de l'actif

x_i : âge de l'actif i à la date de calcul

d : âge début de cotisation dans le régime pour un cotisant

r_j : âge du retraité j à la date de calcul

$reval$: taux de revalorisation annuel de la rente

$Retraite_{(j,x)}$: Montant de la rente du retraité j à l'âge x

$\frac{l_k}{l_x}$: probabilité d'être vivant à l'âge k pour une personne d'âge x

i : taux technique

$$\frac{1}{1+i'} = \frac{1+j}{1+i} \quad \text{d'où } i' = \frac{i-j}{1+j}$$

$$\frac{1}{1+i''} = \frac{1+reval}{1+i} \quad \text{d'où } i'' = \frac{i-reval}{1+reval}$$

$$\text{VAP des Ressources ACTIFS} = \sum_{\text{actif } i}^{Nb \text{ actifs}} \sum_{\text{age } k=x_i}^{r-1} \theta \times Salaire_{(i,k)} \times (1+j)^{(k-x_i)} \times \frac{l_k}{l_{x_i}} \times \frac{1}{(1+i)^{k-x_i}}$$

$$\text{VAP des Engagements RETRAITES} = \sum_{\text{retraité } j}^{Nb \text{ retraités}} \sum_{\text{age } k=r_j}^{w_j} Retraite_{(j,k)} \times (1+reval)^{(k-r_j)} \times \frac{l_k}{l_{r_j}} \times \frac{1}{(1+i)^{k-r_j}}$$

$$\text{VAP des Engagements pour les ACTIFS} = \sum_{\text{actif } i}^{Nb \text{ actifs}} \frac{l_r}{l_{x_i}} \times \frac{1}{(1+i)^{r-x_i}} \times \sum_{\text{age } k=r}^w Retraite_{(i,k)} \times (1+reval)^{(k-r)} \times \frac{l_k}{l_r} \times \frac{1}{(1+i)^{k-r}}$$

Pour simplifier les calculs, si on considère que :

- tous les salariés de même âge x ont le même salaire moyen $Sm(x)$
- et tous les retraités de même âge x ont la même retraite moyenne $Rm(x)$

$$\text{VAP(cotisations)} = \theta \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times Sm(x) \times \sum_{k=x}^{r-1} \frac{l_k}{l_x} \times \frac{1}{(1+i)^{k-x}} \times (1+j)^{k-x}$$

$$\text{VAP(cotisations)} = \theta \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times Sm(x) \times \ddot{a}_{x:r-x}^{(i')}$$

$$\text{Engagements Retraités} = \sum_{x=r}^w R(x) \times Rm(x) \times \sum_{k=x}^w \frac{l_k}{l_x} \times \frac{1}{(1+i)^{k-x}} \times (1+reval)^{k-x}$$

$$\text{Engagements Retraités} = \sum_{x=r}^w R(x) \times Rm(x) \times \ddot{a}_x^{(i'')}$$

$$\begin{aligned} \text{Engagements actifs} &= \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times Rm(r) \times \sum_{k=r}^w \frac{l_k}{l_x} \times \frac{1}{(1+i)^{k-x}} \times (1+reval)^{k-r} \\ &= \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times Rm(r) \times \frac{l_r}{l_x} \times \frac{1}{(1+i)^{r-x}} \times \sum_{k=r}^{w-r} \frac{l_k}{l_r} \times \frac{1}{(1+i)^{k-r}} \times (1+reval)^{k-r} \\ &= \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times Rm(r) \times {}_{r-x}E_x^{(i)} \times \ddot{a}_r^{(i'')} \end{aligned}$$

De plus, en faisant l'hypothèse que le salaire moyen et la retraite moyenne sont les mêmes à tout âge x soit $Sm(x) = Sm$ et $Rm(x) = Rm$ on obtient :

$$\begin{aligned} \text{VAP(cotisations)} &= \theta \times Sm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times \ddot{a}_{x:r-x}^{(i')} \\ \text{Engagements Retraités} &= Rm \times \sum_{x=r}^w R(x) \times \ddot{a}_x^{(i'')} \\ \text{Engagements actifs} &= Rm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times {}_{r-x}E_x^{(i)} \times \ddot{a}_r^{(i'')} \end{aligned}$$

C Rapport entre la retraite moyenne et le salaire moyen d'activité

Dans l'hypothèse d'une répartition pure on égalise Ressources=Engagements
 On obtient la relation suivante :

$$\frac{Rm}{Sm} = \theta \times \frac{\sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times \ddot{a}_{x:r-x}^{(i')}}{\sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times {}_{r-x}E_x^{(i)} \times \ddot{a}_r^{(i'')} + \sum_{x=r}^w R(x) \times \ddot{a}_x^{(i'')}}}$$

d Calcul du taux de couverture dynamique du régime:

$$\rho = \frac{W + VAP_{cotisations}}{VAP_{retraités} + VAP_{retraités}} \text{ en groupe fermé}$$

$$\rho = \frac{W + \theta \times Sm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times \ddot{a}_{x:r-x}^{(i')}}{Rm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times {}_{r-x}E_x^{(i)} \times \ddot{a}_r^{(i'')} + Rm \times \sum_{x=r}^w R(x) \times \ddot{a}_x^{(i'')}}}$$

Avec l'hypothèse W=0

$$\rho = \frac{\theta \times Sm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times \ddot{a}_{x:r-x}^{(i')}}{Rm \times \sum_{x=d}^{r-1} A(x) \times {}_{r-x}E_x^{(i)} \times \ddot{a}_r^{(i'')} + Rm \times \sum_{x=r}^w R(x) \times \ddot{a}_x^{(i'')}}}$$

V Régime de retraite en points

En France, les régimes de retraites complémentaires sont exprimés en points.
Ils sont caractérisés par :

Le salaire de référence :

C'est le montant en euros de la cotisation qui permet d'obtenir un point de retraite. Il est fixé chaque année par décision du conseil d'administration du régime.

La valeur du point :

C'est la valeur du service du point de retraite qui sert au calcul de la pension de retraite. Elle est fixée chaque année par décision du conseil d'administration du régime.

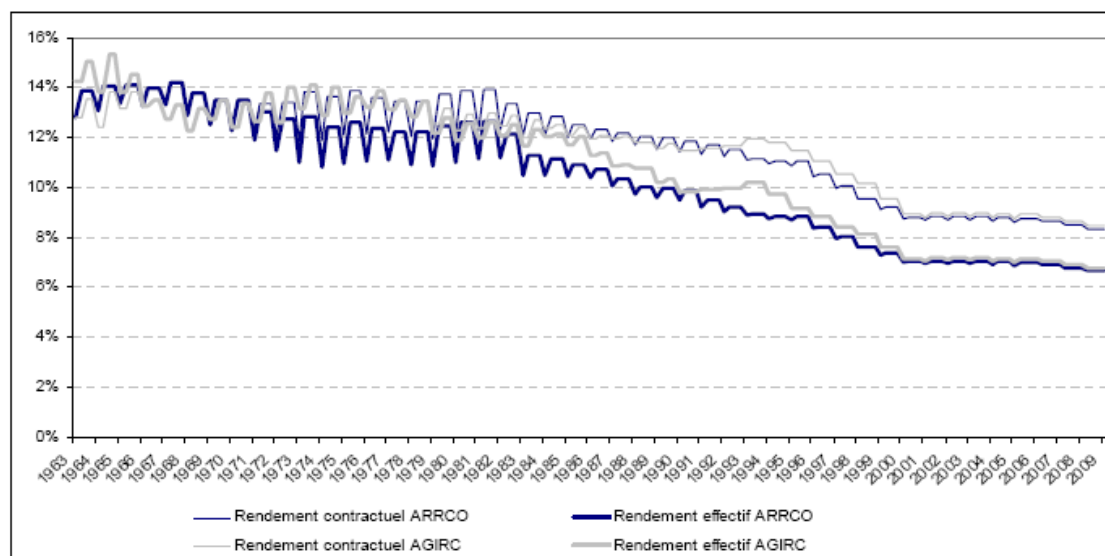
Le rendement du régime :

Quotient de la valeur de point par le salaire de référence.

$$\text{taux rendement régime} = \frac{\text{valeur du point}}{\text{Salaire de référence}}$$

Exemple pour le régime des non cadres (ARRCO) et cadres (AGIRC) en France

Graphique 1 : évolution des rendements effectifs (*) et contractuels des régimes ARRCO et AGIRC depuis 1963 (en %)



(*) Pour l'ARRCO, avant 1999, rendement brut effectif du régime unique (créé en 1999) rétroposé sur la base de l'évolution du rendement de référence et du taux d'appel des cotisations obligatoires

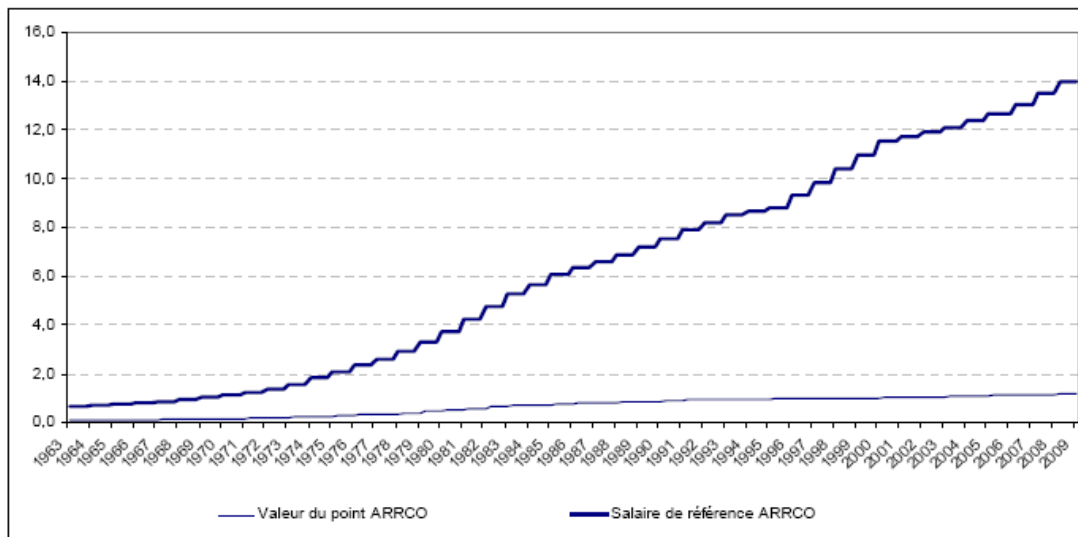
Eléments de calcul

Chaque cotisation donne droit à un nombre de points de retraite pour le cotisant.
La cotisation peut être majorée par un taux d'appel qui ne donne pas de points de retraite.

La pension annuelle est calculée à partir du nombre total des points acquis et de la valeur de service du point à la date de paiement de la retraite

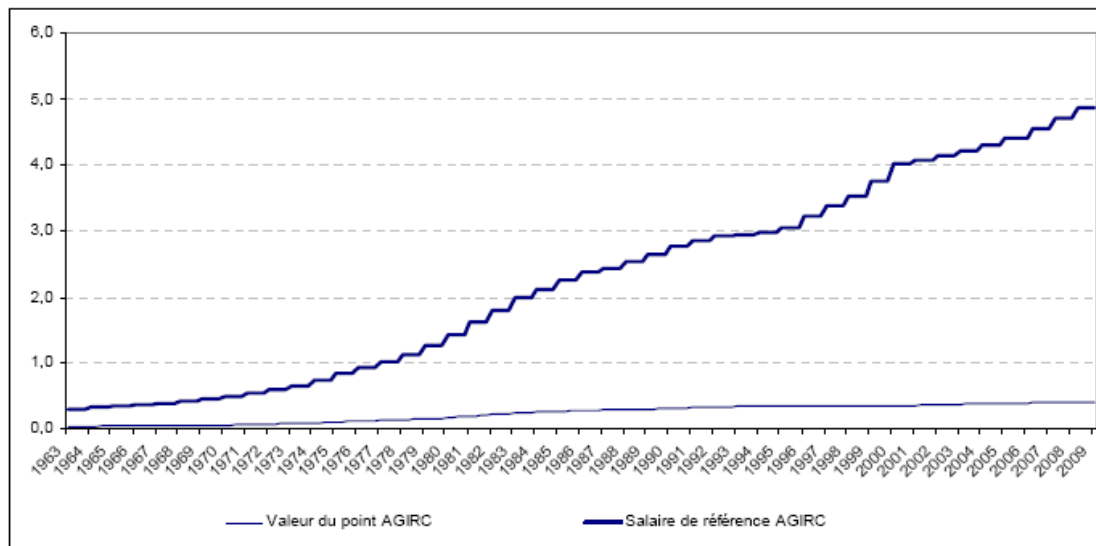
Prix achat point	=	salaire de référence
Droit attaché au point	=	vp = valeur de service du point
cotisation payée	=	$\theta \times$ salaire \times taux d'appel
Nb points produit par une cotisation	=	$\frac{\text{cotisation}}{\text{taux d'appel} \times \text{salaire de référence}}$
pension annuelle	=	$vp \sum_{x=\text{AgeDébutdeCotisation}}^{\text{AgeDépatenRetraite}} N_{\text{points}}(x)$

Graphique 2 : évolution de la valeur du point et du salaire de référence pour le régime de l'ARRCO (en euros courants)



Note : valeur du point au 1^{er} janvier.

Graphique 3 : évolution de la valeur du point et du salaire de référence pour le régime de l'AGIRC (en euros courants)



Note : valeur du point au 1^{er} janvier.